

۱۴۰۴ نوبت اول

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۳	۱۷	۱۵	۵	۳	۲۴	۱۳
فیزیک	۸	۹	۱۷	۱	۲۲	۱۲	۱
شیمی	۷	۱۱	۱۲	۰	۵	۱۹	۶

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درس نامه ۱ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r می شود:

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

۲ اگر t_m و t_n دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی با قدرنسبت r باشند، می توانیم بنویسیم:

$$\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$$

۳ اتحاد چاق و لاغر به صورت زیر است:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{و} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

گام ۱ فرض می کنیم قدرنسبت دنباله r و جمله اولش t_1 باشد. به گفته سؤال S_4 ، 73 برابر S_3 است؛ پس طبق مورد (۱) درس نامه، می توانیم بنویسیم:

$$S_4 = 73S_3 \Rightarrow \frac{t_1(r^4 - 1)}{r - 1} = 73 \times \frac{t_1(r^3 - 1)}{r - 1} \Rightarrow (r^4 - 1) = 73(r^3 - 1) \Rightarrow r^4 + r^3 = 74 \Rightarrow r^3(r + 1) = 74 \Rightarrow r^3 = 2 \Rightarrow r = 2$$

دو عدد متوالی دو عدد متوالی

گام ۲ حالا نسبت t_3 به t_1 را به کمک مورد (۲) درس نامه، به دست می آوریم:

$$\frac{t_3}{t_1} = r^{3-1} = 2^2 = 4$$

۲- گزینه ۴

گام ۱ فرض می کنیم $x^2 + 1 = t$ باشد، پس به دنبال $t^2 + \frac{1}{t^2} = (x^2 + 1)^2 + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ هستیم.

گام ۲ به طرفین تساوی 9 ، $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} = 9$ واحد اضافه می کنیم تا بتوانیم جای $(x^2 + 1)$ ها بنویسیم t :

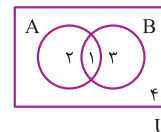
$$(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} = 9 + 1 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 10$$

گام ۳ طرفین تساوی بالا را به توان 2 می رسانیم:

$$t^2 + 2t(\frac{1}{t}) + (\frac{1}{t})^2 = 10^2 \Rightarrow t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} = 100 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 98$$

۳- گزینه ۱

گام ۱ نمودار ون می کشیم و ناحیه هایش را شماره گذاری می کنیم:



حالا $A \cap B$ و $A \cup B'$ را بر حسب شماره ها می نویسیم:

$$A \cup B' = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{و} \quad A \cap B = \{2\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$$

گام ۲ می خواهیم $A \cup B' \subseteq A \cap B$ بشود، پس باید:

رابطه بالا فقط وقتی برقرار است که ناحیه های 1 و 3 وجود نداشته باشند. در نمودار بالا، این ناحیه ها را حذف می کنیم: همان طور که می بینید، $B = U$ و $A \subseteq B$ شد.

۴- گزینه ۴

درس نامه ۱ در مورد ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ ، دو هم ارزی زیر را بلد باشید:

$$\diamond p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

می توانن پایه ها هم بشن.

$$\diamond \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow q \quad \text{یا} \quad p \Leftrightarrow \sim q$$

۲ چند تا هم ارزی مهم:

$p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p$	جابه جایی
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	تبدیل $\Rightarrow$ به $\vee$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	دمورگان

گام ۱ با توجه به مورد (۱) درس نامه، $\sim(p \Leftrightarrow q)$ همان $\sim p \Leftrightarrow q$ است که می توانیم در آن $\Leftrightarrow$ را به دوتا $\Rightarrow$ بشکنیم:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)]$$

گام ۲ حالا به کمک مورد (۲) درس نامه، $\Rightarrow$ ها را به $\vee$ تبدیل می کنیم:

$$\sim[(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \equiv \sim[(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)] \quad (*)$$

$$\sim q \vee p \equiv \sim(q \wedge \sim p) \equiv \sim(\sim p \wedge q)$$

جابه جایی

پس (*) به این صورت درمی آید:

$$\sim[(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim[\sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)]$$

۵- گزینه ۳

درس نامه ۱ اگر α و β ریشه های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند:

۱ جمع و ضربشان از رابطه های زیر محاسبه می شود:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}, P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$$

۲ حاصل دو عبارت متقارن زیر را بر حسب P و S حفظ باشید:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P, \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

عبارت های بالا متقارن اند، چون با عوض کردن جای α و β تغییری نمی کنند.

گام ۱ باید عبارت $\frac{4\alpha + \beta^5}{\Delta\beta^2}$ را به یک عبارت متقارن تبدیل کنیم تا بتوانیم آن را بر حسب S و P بنویسیم، اول تفکیک کسری کنیم:

$$A = \frac{4\alpha + \beta^5}{\Delta\beta^2} = \frac{4}{\Delta} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta^5}{\Delta\beta^2} = \frac{4}{\Delta} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\Delta} \beta^3 \quad (*)$$

گام ۲ طبق درس نامه، ضرب ریشه های معادله $\frac{1}{A}x^2 - \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ می شود $\frac{C}{A} = 2$ ، پس:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\beta} \rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2}$$

$$A = (\frac{4}{\beta^2}) \frac{\alpha}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \beta^3 = \frac{1}{\Delta} (\alpha^2 + \beta^3)$$

که بر حسب S و P می شود:

$$A = \frac{1}{\Delta} (S^2 - 3PS) \quad (**)$$

گام ۳ $P = 2$ بود، S هم که می شود $\Delta = -\frac{B}{A} = -\frac{-5}{1} = 5$ این ها را جای گذاری می کنیم:

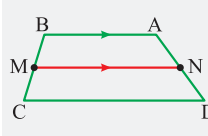
$$A = \frac{1}{\Delta} (5^2 - 3(2)(5)) = \frac{1}{\Delta} (125 - 30) = \frac{95}{\Delta} = \frac{19}{5}$$

۶- گزینه ۲

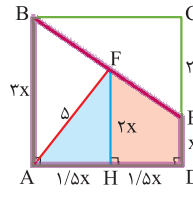


گزینه ۲

درس نامه در هر دوزنقه، اگر مثل شکل زیر از وسط یک



ساق (M)، خطی به موازات قاعده‌ها بکشیم، ساق دیگر را هم نصف می‌کند. طول چنین پاره‌خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل می‌کند، برابر با میانگین قاعده‌ها است: $MN = \frac{AB + CD}{2}$



گام ۱ به گفته سؤال $CD = 3ED$ است؛ پس اگر $ED = x$ باشد، $CD = 3x$ و در نتیجه $CE = 3x - x = 2x$ می‌شود. حالا خوب به دوزنقه ABED نگاه کنید. F وسط ساق BE است؛ پس طبق درس‌نامه، اگر از F موازی قاعده بر AD عمود کنیم، AD را هم نصف می‌کند: $AH = HD = \frac{3x}{2} = 1.5x$

و طول FH می‌شود میانگین قاعده‌ها: $FH = \frac{ED + AB}{2} = \frac{x + 3x}{2} = 2x$

گام ۲ برای محاسبه x، در مثلث قائم‌الزاویه آبی، فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(1.5x)^2 + (2x)^2 = 2.5^2 \Rightarrow 2.25x^2 + 4x^2 = 2.5^2 \Rightarrow 6.25x^2 = 2.5^2 \Rightarrow x = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

گام ۳ مساحت چهارضلعی ADEF برابر با جمع مساحت مثلث آبی و دوزنقه قرمز است:

$$S_{ADEF} = \left(\frac{1}{2} FH \times AH\right) + \left(\frac{ED + FH}{2} \times HD\right) = \left(\frac{1}{2} (1.5x)(2x)\right) + \left(\frac{x + 2x}{2} \times 1.5x\right)$$

$$\xrightarrow{x=1} S_{ADEF} = \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 1.5\right) + \left(\frac{1 + 2}{2} \times 1.5\right) = 2.25 + 2.25 = 4.5$$

۷- گزینه ۳



گزینه ۳

شفاف‌سازی تابع $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ کسری و صورتش عددی ثابت

است؛ پس وقتی حداکثر می‌شود که مخرجش حداقل باشد. بنابراین بیشترین مقدار f برابر $\frac{5}{5} = 1$ است؛ یعنی حداقل مقدار مخرج برابر ۵ است.

درس نامه $y = Ax^2 + Bx + C$ در سهمی

طول رأس می‌شود: $x_S = -\frac{B}{2A}$
 اگر $A > 0$ باشد، سهمی در طول رأس، حداقل و اگر $A < 0$ باشد، سهمی در طول رأس حداکثر می‌شود.

گام ۱ طبق «شفاف‌سازی» حداقل مقدار $\sqrt{mx^2 - 8x + 39}$ برابر ۵ است؛ پس حداقل مقدار زیر رادیکال یعنی $mx^2 - 8x + 39$ برابر ۲۵ است.

گام ۲ با توجه به درس‌نامه، * وقتی $m > 0$ باشد، در $x_S = -\frac{B}{2A} = -\frac{-8}{2m} = \frac{4}{m}$ حداقل مقدار خودش را دارد:

$$f\left(\frac{4}{m}\right) = 1 \Rightarrow m\left(\frac{4}{m}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{m}\right) + 39 = 25 \Rightarrow \frac{16}{m} - \frac{32}{m} = -14$$

$$\Rightarrow -\frac{16}{m} = -14 \Rightarrow m = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} = 1.14 \dots$$

گام ۳ پس [m] می‌شود $[1.14 \dots] = 1$.

۸- گزینه ۱



گزینه ۱

درس نامه برای به دست آوردن بزرگ‌ترین عامل مشترک تعدادی چندجمله‌ای:

اول آن‌ها را تجزیه می‌کنیم.

بعد عوامل مشترک با کم‌ترین توان را در هم ضرب می‌کنیم.

مثلاً بیایید بزرگ‌ترین عامل مشترک چندجمله‌ای‌های $x^3 + 3x^2 + 2x$ و $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$ را پیدا کنیم:

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x + 1)(x + 2)$$

حالا عوامل مشترک (عبارت‌های آبی و قرمز) با کم‌ترین توان را در هم ضرب می‌کنیم:

$$x(x + 1) = x^2 + x$$

گام ۱ طبق درس‌نامه، اول عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$p(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a)$$

$$q(x) = x^6 + 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^3 + 2x + 2) = x^2(x + 1)(x + 2)$$

جمله مشترک

حالا برای به دست آوردن بزرگ‌ترین عامل مشترک، عوامل مشترک با کم‌ترین توان را در هم ضرب می‌کنیم. یکی از عوامل x^2 و دیگری یا $x + 1$ است یا $x + 2$:

$$(I) x^2(x + 1) = x^3 + x^2, \quad (II) x^2(x + 2) = x^3 + 2x^2$$

گام ۲ به گفته سؤال بزرگ‌ترین عامل مشترک به صورت $x^n + x^3$ است که در آن

خبری از ضرب ۲ نیست؛ پس فقط حالت (I) را می‌پذیریم. $p(x) = x^3(x^2 + a)$ وقتی عامل $x + 1$ دارد که $a = -1$ باشد. ببینید:

$$p(x) = x^3(x^2 - 1) = x^3(x - 1)(x + 1)$$

مزدوج

گام ۳ $a = -1$ شد و از مقایسه * و (I) نتیجه می‌گیریم که $n = 2$ است؛ پس $na = -2$ می‌شود.

۹- گزینه ۳

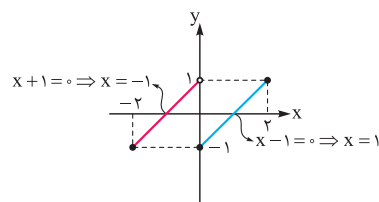


گزینه ۳

درس نامه تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ برابر با تعداد نقاط برخورد نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ است.

روش

گام ۱ نمودار $f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ را می‌کشیم. با توجه به نمودار، $f(1) = 0$ و $f(-1) = 0$ است؛ پس برای این که $f(f(x)) = 0$ بشود باید $f(x) = 1$ یا $f(x) = -1$ باشد.



گام ۲ طبق شکل مقابل، خطوط $y = 1$ و $y = -1$ نمودار $f(x)$ را مجموعاً در سه نقطه قطع می‌کنند؛ پس طبق درس‌نامه، معادله ۳ جواب دارد.



روش

گام ۱ در $f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ جای x ها $f(x)$ قرار می‌دهیم تا به $f(f(x))$ برسیم:

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(x) - 1 & 0 \leq f(x) \leq 2 \\ f(x) + 1 & -2 \leq f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} (x - 1) - 1 & 0 \leq x - 1 \leq 2, 1 \leq x \leq 3 \\ (x + 1) - 1 & 0 \leq x + 1 \leq 2, -1 \leq x \leq 1 \\ (x - 1) + 1 & -2 \leq x - 1 < 0, -1 \leq x < 1 \\ (x + 1) + 1 & -2 \leq x + 1 < 0, -3 \leq x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = \begin{cases} x - 2 & 1 \leq x \leq 3 \\ x & -1 \leq x < 1 \text{ یا } 0 \leq x < 1 \\ x + 2 & -3 \leq x < -1 \end{cases}$$



گام ۳ طبق مورد (۱) درس نامه، $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ است؛ پس:

$$\diamond \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

همیشه نامنفی

$$\diamond 2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha < 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha > 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha (\cos \alpha - 1) > 0 \quad (*)$$

گام ۴ $\cos \alpha \leq 1$ است، پس $\cos \alpha - 1 \leq 0$ و در نتیجه (*) وقتی برقرار است که $\sin \alpha$ منفی باشد.

$\cos \alpha$ مثبت و $\sin \alpha$ منفی شد؛ پس طبق مورد (۲) درس نامه، α باید در ناحیه چهارم باشد.

۱۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ برای ساده کردن نسبت های مثلثاتی به فرم $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ ، به جدول زیر توجه کنید:

روش ساده کردن	فرم زاویه
گام ۱ $k\pi$ را به همراه $\pm$ بعدش حذف می کنیم و فقط نسبت مثلثاتی α را می نویسیم. در سمت چپ نسبت جدید یک دایره توخالی هم می گذاریم. مثلاً برای $\cos(11\pi - \alpha)$ داریم: $\cos(11\pi - \alpha) = \cos \alpha$ گام ۲ حالا باید ببینیم $k\pi \pm \alpha$ در کدام ناحیه قرار دارد تا علامت نسبت مثلثاتی اش مشخص شود. این علامت را در دایره توخالی می نویسیم. مثلاً در نسبت بالا $\pi - \alpha + 10\pi$ در ناحیه دوم مثلثاتی است (زاویه ای قابل حذف در ربع ۲ است) و کسینوس در این ناحیه منفی است، پس در دایره توخالی منفی قرار می دهیم: $\cos(11\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ همان کارهایی که برای «$k\pi \pm \alpha$» انجام دادیم، این جا هم انجام می دهیم؛ با این تفاوت که در گام اول نسبت مثلثاتی را تغییر می دهیم؛ یعنی $\sin$ و $\cos$ و همین طور $\tan$ و $\cot$ را به همدیگر تبدیل می کنیم: عدده فرد $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ مثلاً $\tan(\frac{11\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$ $\tan$ را به $\cot$ تبدیل می کنیم. از زاویه $\alpha - \frac{11\pi}{2}$، مضارب 2π را حذف کنیم به $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ می رسیم که در ربع ۳ قرار دارد.	

۲ نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه به صورت زیرند:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

۳ نسبت های مثلثاتی 15° را حفظ باشید:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}, \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$$

گام ۴ نسبت ها را به کمک مورد (۱) و (۲) درس نامه، ساده می کنیم:

$$\diamond \sin(-285^\circ) = -\sin(270^\circ + 15^\circ) = -(-\cos 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\diamond \cos(-105^\circ) = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

گام ۴ حالا ضابطه ها را مساوی صفر می گذاریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

هر سه ریشه در دامنه ضابطه شان حضور دارند؛ پس هر سه قبول اند و معادله ۳ ریشه دارد.

۱۰- گزینه ۱

شفاف سازی $f(0) = 2$ ، یعنی تابع از مبدأ مختصات $(0, 0)$ نمی گذرد.

درس نامه توابع اکیدا صعودی وارونشان را فقط روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می کنند.

گام ۱ منظور سؤال از یک به یک بودن f این است که f اکیدا صعودی است. به گفته سؤال f ، وارونش را در نقطه $(a, f(a))$ قطع می کند که طبق درس نامه باید روی $y = x$ باشد، پس: $f(a) = a$

و چون f از مبدأ نمی گذرد، $a, f(a)$ مخالف صفرند.

گام ۲ خواسته سؤال می شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

۱۱- گزینه ۲

درس نامه ۱ در دنیای لگاریتم ها، قوانین زیر برقرارند:

(الف) اگر $\log_a b = c$ باشد، می توانیم بنویسیم: $a^c = b$

پس $\log_a a = 1$ می شود.

(ب) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان، به این صورت انجام می شود:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad \text{و} \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

(پ) لگاریتم، توان روی عبارت جلویش را به عنوان ضریب به پشت خودش می برد؛ یعنی:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

(ت) لگاریتم، معکوس توان روی مبنایش را به عنوان ضریب به پشت خودش می برد؛ یعنی:

$$\log_a b = \frac{1}{n} \log_a b^n$$

(ث) ترکیب دو قانون قبلی، این جوری می شود:

$$\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} = ac - bd$$

گام ۲ به کمک مورد (۲) درس نامه، دترمینان را حساب می کنیم:

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = \frac{(\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)}{\log 1} = \log \frac{5}{2}$$

گام ۳ حالا باید معادله $\log_{10}(3x+1) = \log_{10} \frac{5}{2}$ را حل کنیم؛ مبنایا برابرند؛ پس عبارتهای جلوی لگاریتم ها هم باید برابر باشند:

$$3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گام ۴ $\log \sqrt{x}$ به ازای $x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ می شود:

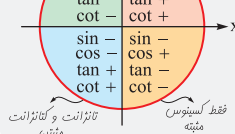
$$\log \sqrt{2^{-1}} = \log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2}$$

۱۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ اتحادهای زیر را بلد باشید:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

۲ علامت نسبت های مثلثاتی در ناحیه های مختلف دستگاه مختصات این طوری است:



گام ۱ به گفته سوال ۳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{ax})}{kx^2} = 3$ است. $x = 0$ ریشه مخرج است؛ پس باید ریشه صورت هم باشد. چون در غیر این صورت حاصل حد به جای عدد ۳ می شود $\frac{\text{عدد}}{0} = \pm \infty$:

$$k + \cos(0) = 0 \Rightarrow k = -1$$

گام ۲ وقتی $x \rightarrow 0$ ، در $\cos(\sqrt{ax})$ ، u به سمت صفر میل می کند؛ پس طبق مورد (۲) درس نامه، می توانیم به جای u بنویسیم $1 - \frac{1}{2}u^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{ax})}{kx^2} = 3 \xrightarrow{k=-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + (1 - \frac{1}{2}(\sqrt{ax})^2)}{-x^2} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}ax}{-x^2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}a = 3 \Rightarrow a = 6$$

گام ۳ پس $\frac{a}{k} = -\frac{6}{-1} = 6$ می شود.

۱۶- گزینه ۳

شفاف سازی
۱ «نمودار تابع $f(x)$ در همسایگی $x = -a$ به صورت مقابل است»
 $\lim_{x \rightarrow (-a)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-a)^+} f(x) = -\infty$ یعنی $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty$ است.
۲ « $y = -4$ ، مجانب افقی تابع f است»؛ یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = -4$ است.

درس نامه هم ارزی پرتوان، برای حد $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + \dots + a_nx + k}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots + b_nx + k'}$ سه حالت زیر را مطرح می کند:

الف) وقتی درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، یعنی $m > n$ ، حاصل حد بی نهایت می شود.
ب) وقتی درجه مخرج از درجه صورت بیشتر باشد، یعنی $n > m$ ، حاصل حد صفر می شود.
پ) وقتی درجه صورت با درجه مخرج برابر باشد، یعنی $m = n$ ، حاصل حد می شود:

$$\frac{\text{ضرب بزرگترین توان } x \text{ در صورت}}{\text{ضرب بزرگترین توان } x \text{ در مخرج}} = \frac{a_1}{b_1}$$

گام ۱ طبق مورد (۱) شفاف سازی، $x = -a$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد؛ پس $x = -a$ باید ریشه $mx - 2$ است:

$$-ma - 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{a} \quad (1)$$

گام ۲ طبق مورد (۲) شفاف سازی داریم:

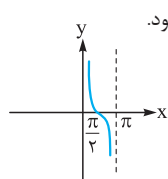
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a^2x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a^2x^2 - 2x + 1}{mx^2 + \dots} = -4$$

پرتوان $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a^2x^2}{mx^2} = -4 \Rightarrow \frac{a^2}{m} = -4 \xrightarrow{(1)} \frac{a^2}{-\frac{2}{a}} = -4$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{-2} = -4 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۷- گزینه ۳

گام ۱ وقتی $x \rightarrow \pi^-$ ، دوتا اتفاق می افتد:
۱ $[x - \pi]$ می شود:
۲ با توجه به بخشی از نمودار $\cot x$ در مقابل، $\cot x = -\infty$ می شود.



$$\frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

گام ۲ پس $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ می شود:

ناحیه ۲: $\sin > 0$

$$\sin(165^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(375^\circ) = \sin(360^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

گام ۳ حالا موارد بالا را در $A = \frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)}$ جای گذاری می کنیم:

$$A = \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{2\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{5\sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \left(\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{2\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ} \right)$$

$$= \frac{1}{5} (\cot 15^\circ - 2)$$

گام ۴ طبق مورد (۲) درس نامه، $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ است، پس A می شود:

$$A = \frac{1}{5} (2 + \sqrt{3} - 2) = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

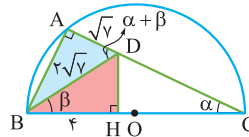
۱۴- گزینه ۱

درس نامه ۱ زاویه محاطی رو به قطر همیشه 90° است؛ ببینید:

۲ $\tan(\alpha \pm \beta)$ را به این صورت بسط می دهیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

گام ۱ به کمک فیثاغورس در مثلث های رنگی، طول AB و DH را حساب می کنیم:



$$\triangle ABD : AB = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{28 - 2} = \sqrt{26}$$

$$\triangle BDO : DH = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{28 - 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

گام ۲ $\hat{A}DB$ ، زاویه خارجی مثلث BDC است، پس برابر است با: $\hat{A}DB = \alpha + \beta$
حالا در مثلث آبی برای $\alpha + \beta$ تانژانت می نویسیم و آن را به کمک مورد (۲) درس نامه، بسط می دهیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \sqrt{3}$$

در مثلث قرمز، $\tan \beta = \frac{DH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است؛ این را در تساوی بالا جای گذاری می کنیم:

$$\frac{\tan \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{5} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

۱۵- گزینه ۴

درس نامه ۱ در مورد حد بی نهایت روابط زیر را بلد باشید:

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$

۲ وقتی $u \rightarrow 0$ ، می توانیم به جای $\cos u$ بنویسیم $1 - \frac{1}{2}u^2$.

۲۱- گزینه ۱

درس نامه تابع f به دو شرط در $x = a$ مشتق پذیر است:

- در $x = a$ پیوسته باشد؛ یعنی حد راست، حد چپ و مقدارش در $x = a$ برابر باشند.
- مشتق چپ و راستش در $x = a$ برابر باشند.

گام ۱ برای این که $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید در مرز

دامنه، یعنی $x = a$ مشتق پذیر باشد. طبق درس نامه، دو شرط داریم:

پیوستگی در $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} (2bx + c) = \lim_{x \rightarrow a^+} (3x^2) = 3a^2$$

از ضابطه پایینی

$$\Rightarrow 2ba + c = 3a^2 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست در $x = a$:

$$f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ 6x & x \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a \quad (2)$$

گام ۲ (۲) را در (۱) جای گذاری می کنیم:

$$2(3a)a + c = 3a^2 \Rightarrow -c = 3a^2$$

پس $a^3 + b - c$ می شود:

$$a^3 + (3a) + 3a^2 = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - 1 = (a+1)^3 - 1$$

مکعب دو جمله ای

۲۲- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر $a \in D_f$ و $f'(a) = 0$ یا موجود نباشد، به $x = a$ ، نقطه بحرانی

تابع f می گوئیم. حواستان باشد که در تابع با دامنه $[a, b]$ ، نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه، یعنی $x = a, b$ ، همیشه بحرانی اند.

۲ برای پیدا کردن نقاط بحرانی توابع به فرم $|f(x)|$ ، اول ریشه های داخل قدرمطلق را به عنوان نقاط بحرانی کنار می گذاریم و بعد قدرمطلق را حذف می کنیم و جواب های معادله $y' = 0$ را هم به نقاط بحرانی قبلی اضافه می کنیم.

۳ برای به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته f ، مقدار تابع را در نقاط بحرانی اش حساب می کنیم؛ بیشترین مقدار همان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار همان مینیمم مطلق است.

گام ۱ در تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a|$ با دامنه $[0, a]$ ، $x = a$ هم انتهای دامنه است،

هم ریشه داخل قدرمطلق؛ پس بحرانی است. $x = 0$ هم ابتدای دامنه است و بحرانی. حالا برای پیدا کردن بقیه نقاط بحرانی، طبق مورد ۲ درس نامه، از f' قدرمطلق را برمی داریم و معادله $y' = 0$

$$\text{را حل می کنیم: } y = x^{\frac{2}{3}}(x - a) = x^{\frac{5}{3}} - ax^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}ax^{\frac{-1}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(\frac{5}{3}x - 2a) = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

گام ۲ حالا برای پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع، طبق مورد (۳) درس نامه، مقدار تابع در

نقاط بحرانی را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a| \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x=a \rightarrow f(a) = 0 \\ x=\frac{2a}{5} \rightarrow f(\frac{2a}{5}) = \sqrt[3]{(\frac{2a}{5})^2} |\frac{2a}{5} - a| \end{cases}$$

گام ۳ به گفته سوال، ماکزیمم مطلق برابر $1/5$ است؛ پس $f(\frac{2a}{5})$ ماکزیمم مطلق است

نه $f(0)$ و $f(a)$ که برابر صفرند:

$$\sqrt[3]{(\frac{2a}{5})^2} |-\frac{3}{5}a| = 1/5$$

از بین گزینه ها فقط $a = 2/5$ در $\textcircled{1}$ در معادله بالا صدق می کند. ببینید:

$$\sqrt[3]{(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5})^2} |-\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}| = 1/5 \Rightarrow 1 \times \frac{3}{5} = 1/5 \quad \checkmark$$

پس $\textcircled{1}$ جواب است.

۱۸- گزینه ۲

گام ۱ دامنه $f(x) = \frac{\sqrt{3}|ax + a|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|}$ برابر $\mathbb{R} - \{a\}$ است؛ پس $x = a$ ریشه مخرج است:

گام ۲ از طرفی سوال گفته $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود است. چون $x = a$ ریشه مخرج است؛

این اتفاق به شرطی می افتد که $x = a$ ریشه صورت هم باشد، چون در غیر این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\text{عدد}}{0} = \pm \infty$ درمی آید که خلاف گفته سوال است:

$$\sqrt{3}|a^2 + a| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } -1$$

به ازای $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{3}|ax + a|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|} = 0$ می شود در صورتی که سوال گفته تابع f ، ناصفر است؛ بنابراین فقط $a = -1$ را می پذیریم.

گام ۳ $a = -1$ را در (۱) جای گذاری می کنیم:

$$(-1)^2 + (m-2)(-1) + (-1)^2 = 0 \Rightarrow -1 + 2 - m + 1 = 0 \Rightarrow m = 2$$

حالا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3}|ax + a|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|}$ را به ازای $a = -1$ و $m = 2$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|-x-1|}{|x^2 + 1|} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|(x+1)(x^2-x+1)|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{|(-1)^2 - (-1) + 1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۲

درس نامه فرمول مشتق برخی توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
اعداد حقیقی $mf \pm ng$	$mf' \pm ng'$
u^n	$nu'u^{n-1}$

گام ۱ طبق درس نامه، $f'(1) - 2g'(1)$ همان $(f - 2g)'(1)$ است، پس اول ضابطه

$f(x) - 2g(x)$ را به دست می آوریم؛ حواسمان هم هست که $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ همان

$$|x - 2| \text{ است: } \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$\begin{aligned} f(x) - 2g(x) &= \frac{2(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2\sqrt{x^2-4x+4} + 2\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{2|x-2| - 2|x-2| - 2\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x^2}} = -2\sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = -2\sqrt{3}x \times \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \\ &= -2\sqrt{3}x \times x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = -2\sqrt{3}x^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

گام ۲ پس $(f(x) - 2g(x))'$ می شود:

$$\begin{aligned} (f(x) - 2g(x))' &= (-2\sqrt{3}x^{\frac{1}{6}})' = -2\sqrt{3} \times \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} \\ &= -2\sqrt{3} \times -\frac{1}{6} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

در نتیجه $(f - 2g)'(1)$ می شود:

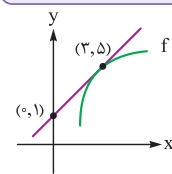
۲۰- گزینه ۴

مقدار $f'(3)$ همان شیب خط مماس بر f در $x = 3$ است.

خط d در شکل زیر

خط d از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 5)$ می گذرد؛ پس شیبش می شود:

$$f'(3) = m = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$





گام ۷ حالا خواسته سؤال را به کمک مورد (۳) درس نامه به دست می آوریم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \quad (*)$$

و A و B' مستقل اند، پس:

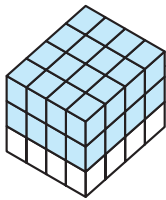
$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A) \times (1 - P(B)) = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$P(B')$ هم که همان $1 - P(B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ است. این ها را در (*) جای گذاری می کنیم:

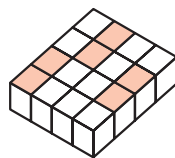
$$P(A \cup B') = \frac{3}{5} + \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{5} + \frac{2}{8} = \frac{34}{40} = \frac{17}{20}$$

۲۵- گزینه ۲

چون به دنبال برداشتن بیشترین مکعب کوچک هستیم، اول دو ردیف بالا را مطابق شکل (۱) برمی داریم؛ بعد برای رسیدن به نمای مورد نظر ۶ مربع قرمز را هم برمی داریم (شکل ۲).



شکل (۱)



شکل (۲)

پس در مجموع حداکثر باید «۳۸» مکعب کوچک برداریم.

تیزبازی در همان مرحله اول که دو ردیف اول را حذف کردیم، ۳۲ مکعب کوچک برداشته شد. طبیعتاً برای رسیدن به نمای مطلوب باید بیشتر از ۳۲ مکعب برداریم که فقط ۲ بیشتر از ۳۲ است.

۲۶- گزینه ۴

درس نامه ۱ در شکل مقابل، دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه را کشیده ایم. در چنین مثلثی طول شعاع دایره می شود:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

عمودمنصف هر پاره خط در ۲ مرحله رسم می شود:

مرحله (۱)	مرحله (۲)
یک کمان به مرکز A و شعاع بیشتر از نصف AB رسم می کنیم.	همان کمان قبلی را این بار به مرکز B می زنیم. خطی که از نقطه های برخورد این دو کمان (M و N) می گذرد، عمودمنصف پاره خط AB است.

گام ۷ شکل مسئله به صورت مقابل است. فرض می کنیم طول ساق ها x باشد، در این صورت طبق فیثاغورس طول وتر می شود $\sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$. به گفته سؤال شعاع دایره محاطی مثلث قائم الزاویه برابر ۳ است، پس طبق مورد (۱) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{x + x - x\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

گام ۷ طبق مورد (۲) درس نامه برای رسم عمودمنصف یکی از ساق ها باید دهانه پرگار را حداقل بیشتر از $\frac{x}{2} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2} = \sqrt{2} + 1$ باز کنیم.

۲۳- گزینه ۲

درس نامه ۱ میانگین و واریانس داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و σ^2 نشان می دهیم و برای محاسبه اش از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ با اضافه کردن یک مقدار ثابت به داده ها، واریانس تغییری نمی کند.

گام ۷ به گفته سؤال، انحراف از y پنج داده، به ترتیب برابر $-1, -5, -6, -7$ و 4 است؛ پس اگر y واحد به داده ها اضافه کنیم، داده ها می شود:

گام ۷ چون داده های بالا از اضافه شدن مقدار ثابت y به داده ها به دست آمده اند، طبق مورد (۲) درس نامه، واریانسشان با داده های اصلی برابر است.

گام ۷ میانگین داده ها را حساب می کنیم: $\bar{x} = \frac{-1 - 5 - 6 - 7 + 4}{5} = -\frac{15}{5} = -3$

پس طبق مورد (۱) درس نامه، واریانس می شود:

$$\sigma^2 = \frac{(-1 - (-3))^2 + (-5 - (-3))^2 + (-6 - (-3))^2 + (-7 - (-3))^2 + (4 - (-3))^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 4 + 9 + 16 + 49}{5} = \frac{82}{5} \times \frac{2}{2} = 16 \frac{4}{5}$$

۲۴- گزینه ۳

درس نامه ۱ برای دو پیشامد مستقل A و B از فضای نمونه ای S ، رابطه زیر برقرار است:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

برعکس مورد بالا هم برقرار است؛ یعنی اگر رابطه بالا برقرار باشد، A و B مستقل اند.

۲ اگر یکی از « A و « B یا « A' و « B' یا « A و « B' یا « A' و « B' مستقل باشند، سه تایی دیگر هم مستقل اند.

۳ چند تا قانون مهم مقابل را بلد باشید:

$$\diamond P(A') = 1 - P(A)$$

$$\diamond P(A - B) = P(A \cap B')$$

$$\diamond P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۴ از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $\begin{cases} a = ck \\ b = dk \end{cases}$ می شود.

مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، $\begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases}$ می شود.

گام ۷ به گفته سؤال $P(A - B) = P(A)P(B')$ است که طبق مورد (۳) درس نامه، $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$ همان $P(A - B)$ است؛ پس:

از تساوی بالا نتیجه می گیریم که A و B' و در نتیجه « A و « B و « A' و « B' هم مستقل اند.

گام ۷ از $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ ، طبق مورد (۴) درس نامه نتیجه می گیریم که:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/5} = \frac{5}{6} \Rightarrow P(A) = \lambda k \text{ و } P(B) = \delta k$$

گام ۷ A' و B' مستقل شدند، پس طبق مورد (۱) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

از طرفی به گفته سؤال $P(A' \cap B') = 0/25$ است؛ پس:

$$P(A') \times P(B') = 0/25 \Rightarrow (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0/25$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda k)(1 - \delta k) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 13k + 40k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 40k^2 - 13k + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow k = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(40)(\frac{3}{4})}}{2(40)}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{80} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{80} = \frac{13 \pm 7}{80} = \frac{6}{80} \text{ یا } \frac{1}{4}$$

به ازای $\frac{1}{4}$ ، $k = \frac{1}{4}$ ، $P(A) = \lambda k = 2$ ، می شود در صورتی که احتمال بزرگتر از ۱ نداریم؛ پس

$k = \frac{3}{40}$ را می پذیریم: $P(A) = \lambda k = \frac{1}{40} \times \frac{3}{40} = \frac{3}{1600}$ و $P(B) = \delta k = \frac{1}{40} \times \frac{3}{40} = \frac{3}{1600}$

۲۷ - گزینه ۱

درس نامه ۱ در مثلث قائم الزاویه ۴ زاویه خاص و مهم داریم که نکاتشان را در جدول زیر برایتان آورده‌ایم:

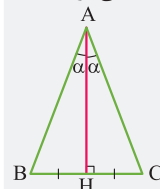
زاویه	ویژگی در مثلث قائم الزاویه	شکل
۳۰°	ضلع رو به این زاویه، نصف وتر است و برعکس.	
۴۵°	ضلع رو به این زاویه، ۱/۲ وتر است و برعکس.	
۶۰°	ضلع رو به این زاویه، sqrt(3)/2 وتر است و برعکس.	
۱۵°	در مثلث قائم الزاویه‌ای که زاویه ۱۵° دارد، ارتفاع وارد بر وتر، ۱/۴ وتر است و برعکس. یعنی اگر در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، ۱/۴ وتر باشد، کوچک‌ترین زاویه آن مثلث ۱۵° است.	

۲ در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است؛ یعنی برای میانه AM در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$AM = \frac{BC}{2} \quad \text{یا} \quad AM = BM = MC$$

همان‌طور که می‌بینید؛ با رسم این میانه، دوتا مثلث متساوی الساقین درست می‌شود.

۳ در هر مثلث متساوی الساقین، مطابق شکل مقابل، ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز و میانه هم هست.



گام ۱ (محاسبه زاویه‌های مورد نیاز) طول ساق‌های مثلث متساوی الساقین ABC در شکل مقابل را x در نظر می‌گیریم.

به گفته سؤال $AB = 2CE$ است، پس $CE = \frac{x}{2}$ می‌شود. به

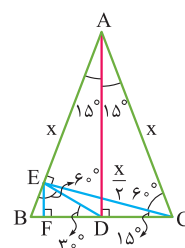
مثلث قائم الزاویه AEC نگاه کنید؛ طول ضلع رو به $\hat{A} = 30^\circ$ نصف وتر

است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، $\hat{A} = 30^\circ$ می‌شود. از طرفی

طبق مورد (۳) درس‌نامه، ارتفاع AD در مثلث متساوی الساقین ABC، نیمساز هم هست؛ پس:

$$\hat{BAD} = \hat{DAC} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه AEC، $\hat{ACE} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ می‌شود.



زوایای مجاور به ساق در مثلث ABC را هم حساب می‌کنیم:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

پس زاویه ECD می‌شود $15^\circ - 60^\circ = 75^\circ$.

گام ۲ (محاسبه ED و طول BD) ارتفاع AD در مثلث ABC، میانه هم هست، پس D وسط ضلع BC است و در نتیجه در مثلث قائم الزاویه BEC، ED میانه وارد بر وتر است؛ بنابراین طبق مورد (۲) درس‌نامه دوتا اتفاق می‌افتد:

♦ مثلث EDC متساوی الساقین است، پس $\hat{CED} = \hat{ECD} = 15^\circ$ می‌شود. زاویه خارجی مثلث DEC است، پس:

بنابراین مثلث قائم الزاویه EFD زاویه‌های 30° و 60° دارد.

$$BD = ED = 2\sqrt{3} + 4 \quad \text{♦ ED، BD و DC برابرند؛}$$

گام ۳ (محاسبه طول FD و خواسته سؤال) در مثلث قائم الزاویه EFD، رو به زاویه 60°

$$FD = \frac{\sqrt{3}}{2} ED = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3} + 4) = 3 + 2\sqrt{3}$$

پس طول BF می‌شود:

$$BF = BD - FD = (2\sqrt{3} + 4) - (3 + 2\sqrt{3}) = 1$$

۲۸ - گزینه ۳

گام ۱ (تحلیل طول OC، OE و EC) در شکل مقابل، زاویه B رو به قطر و 90° است، پس مثلث ABC قائم الزاویه و زاویه‌های α و β متمم هم‌اند. در مثلث قائم الزاویه EOC برای زاویه β ، کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos \beta = \frac{OC}{EC}$$

☆ نکته: سینوس و کسینوس دو زاویه متمم برابرند.

طبق نکته، به جای $\cos \beta$ می‌توانیم بنویسیم $\sin \alpha$ که خود سؤال گفته برابر $\frac{8}{10}$ است:

$$\sin \alpha = \frac{OC}{EC} \Rightarrow \frac{OC}{EC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} OC = 4x \\ EC = 5x \end{cases}$$

$3x$ ، $4x$ و $5x$ فیثاغورسی‌اند، پس طول OE می‌شود $3x$.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): طبق شکل بالا، شعاع دایره برابر $4x$ است، پس $AO = OF = 4x$

و در نتیجه طول EF می‌شود:

حالا برای محاسبه طول BC بر حسب x، در مثلث قائم الزاویه ABC برای α ، سینوس می‌نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{BC}{4x + 4x} \Rightarrow BC = 8x \times \frac{5}{8} = 5x$$

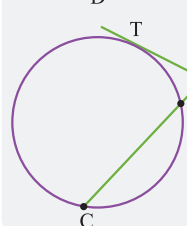
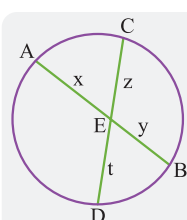
پس BE می‌شود:

$$\frac{BE}{EF} = \frac{1/5x}{1/4x} = \frac{4}{5} \quad \text{بنابراین}$$

۲۹ - گزینه ۴

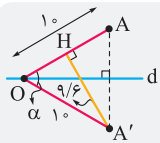
درس نامه ۱ در هر دایره، بین قطعه‌هایی که دو وتر در داخل دایره روی همدیگر می‌سازند (x، y، z و t در شکل مقابل) رابطه زیر برقرار است:

$$xy = zt$$



۲ در شکل مقابل، بین مماس AT و قطعات AB و AC رابطه زیر برقرار است:

$$AT^2 = AB \times AC$$



تیزبازی فقط شکل (۱) را می کشیم. در مثلث قائم الزاویه OHA' ، برای α سینوس می نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{9/6}{10} = \frac{96}{100}$$

با توجه به اتحاد $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ می شود:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{96^2}{100^2} = \frac{100^2 - 96^2}{100^2} = \frac{(100-96)(100+96)}{100^2}$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2 \times 14}{100} = \pm 0.28$$

حالا به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث AOA' ، طول AA' را حساب می کنیم:

$$AA'^2 = OA^2 + OA'^2 - 2OA \cdot OA' \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AA'^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 (\pm 0.28) = 200 \pm 200 (0.28) = 200 \pm 56$$

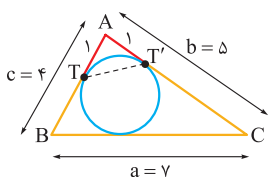
$$\Rightarrow AA'^2 = 144, 256 \Rightarrow AA' = 12 \text{ یا } 16$$

که باز هم جمع مقادیر AA' می شود ۲۸. $12 + 16 = 28$

۳۱- گزینه ۲

درس نامه طول قطعه هایی را که دایره محاطی داخلی روی ضلع های مثلث درست می کند، می توانید از رابطه های جدول زیر محاسبه کنید. فقط حواستان باشد که در این رابطه ها P نصف محیط و a, b و c طول ضلع های مثلث هستند.

شکل	طول قطعات	نوع قطعات
	$x = P - a$	قطعات متناظر با رأس A
	$y = P - b$	قطعات متناظر با رأس B
	$z = P - c$	قطعات متناظر با رأس C



گام ۱ (محاسبه طول AT و AT') در شکل مقابل، AT و AT' قطعات متناظر با رأس A هستند؛ پس طبق درس نامه طولشان می شود:

$$AT = AT' = P - a = \frac{4 + 5 + 7}{2} - 7 = 8 - 7 = 1$$

گام ۲ (تشخیص استراتژی حل): الان اگر $\cos A$ را داشته باشیم، می توانیم به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث ATT' ، طول TT' را به دست بیاوریم، در مثلث ABC ، طول هر سه ضلع را داریم؛ پس با نوشتن قضیه کسینوس در آن می توانیم $\cos A$ را به دست بیاوریم.

گام ۳ (محاسبه $\cos A$):

$$\triangle ABC: a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos A$$

$$\Rightarrow 49 \cos A = 16 + 25 - 49 \Rightarrow \cos A = -\frac{8}{49} = -\frac{1}{6}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سوال):

$$\triangle ATT': TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \cdot AT' \cdot \cos A \Rightarrow TT'^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{6})$$

$$\Rightarrow TT'^2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow TT' = \frac{\sqrt{21}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{15} = 0.4 \sqrt{15}$$

۳۲- گزینه ۴

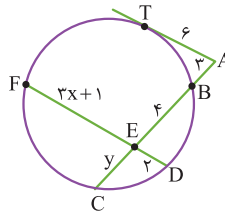
درس نامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، ضرب داخلی شان می شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

۲ دو ویژگی مهم از ضرب داخلی را بلد باشید:

ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع پذیری دارد؛ یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



گام ۱ (محاسبه y): طبق مورد (۲) درس نامه، برای مماس AT رابطه زیر را داریم:

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 6^2 = 3(3 + 4 + y) \Rightarrow 36 = 3(7 + y)$$

$$\Rightarrow 7 + y = 12 \Rightarrow y = 5$$

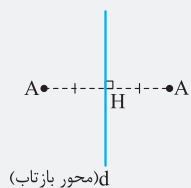
گام ۲ (محاسبه x و خواسته سوال) وترهای BC و FD داخل دایره همدیگر را قطع می کنند، پس طبق مورد (۱) درس نامه، می توانیم بنویسیم:

$$EF \times ED = EB \times EC \Rightarrow (3x+1) \times 2 = 4y \Rightarrow 3x+1=10 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

پس $\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = 0.6$ می شود

۳۰- گزینه ۱

درس نامه ۱ طبق شکل زیر، برای پیدا کردن بازتاب نقطه A نسبت به خط d

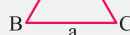


(محور بازتاب)، اول از نقطه A به خط d عمود می کنیم و پای عمود را H می نامیم؛ بعد AH را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه A' برسیم. نقطه A' بازتاب A نسبت به خط d است:

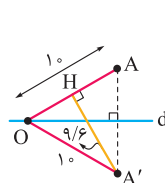
۲ در شکل بالا، محور بازتاب (d) ، عمود منصف AA' است. بنابراین طبق ویژگی عمود منصف، هر نقطه ای روی محور بازتاب انتخاب کنیم، فاصله اش از A و A' به یک اندازه است.

۳ قضیه کسینوس ها، مطابق شکل در مثلث ABC ، داریم:

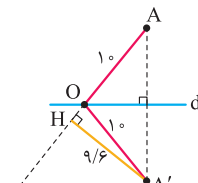
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$



گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن): با توجه به فاصله O از AA' ، دوتا شکل زیر را می توانیم بکشیم. در شکل (۱)، فاصله A' از خود OA را داریم ولی در شکل (۲)، فاصله A' از امتداد OA را.



شکل (۱)



شکل (۲)

طبق مورد (۲) درس نامه، در هر دو شکل بالا، d عمود منصف AA' است؛ پس $OA = OA' = 1$ می شود.

گام ۲ (محاسبه طول OH): در هر دو شکل بالا برای محاسبه طول OH ، فیثاغورس می نویسیم:

$$OH^2 = 10^2 - 9/6^2 = 10^2 - \frac{96^2}{10^2} = \frac{100^2 - 96^2}{10^2} = \frac{(100-96)(100+96)}{10^2}$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow OH = \frac{2 \times 14}{10} = 2.8$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سوال): حالا برای محاسبه طول AA' ، در هر دو شکل، در مثلث AHA' فیثاغورس می نویسیم. فقط حواستان هست که در شکل (۱)، $AH = 10 - 2.8 = 7.2$ و در شکل (۲)، $AH = 10 + 2.8 = 12.8$ است:

$$(1) \text{ شکل: } AA'^2 = 7.2^2 + 9/6^2 = 2/4^2 (3^2 + 4^2) \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AA' = 2/4 \times 5 = 12$$

$$(2) \text{ شکل: } AA'^2 = 12.8^2 + 9/6^2 = 3/2^2 (4^2 + 3^2) \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AA' = 3/2 \times 5 = 16$$

پس جمع مقادیر AA' می شود ۲۸. $12 + 16 = 28$

بسط برای این سطره

گام ۳ (محاسبه $|A + (k-1)I|$)

$$\diamond |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-4) - 2(2-4) + 2(4-2) = 5 \quad (1)$$

حالا $A + (k-1)I$:

$$\diamond A + (K-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

پس دترمینانش می‌شود:

بسط برای این سطره

$$|A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= k(k^2-4) - 2(2k-4) + 2(4-2k) = (k^3-4k) - (4k-8) + (8-4k)$$

$$= k^3 - 12k + 16 \quad (2)$$

گام ۴ (محاسبه k): (۱) و (۲) را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{k} (k^3 - 12k + 16) = 125 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0$$

☆ نکته اگر می‌خواهید با حدس‌زدن ریشه‌های یک معادله درجه ۳ و بیشتر از آن را پیدا کنید، بهتر است مقسوم‌علیه‌های عدد ثابت معادله را چک کنید.

طبق نکته بالا برای حدس‌زدن جواب معادله درجه ۳ باید مقسوم‌علیه‌های ۹؛ یعنی ± 1 یا ± 3 را چک کنیم. $k = -3$ اوکی است؛ ببینید:

$$(-3)^3 - 12(-3) - 9 = -27 + 36 - 9 = 0 \quad \checkmark$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) مقدار $|A + (k+1)I|$ را به ازای $k = -3$ می‌خواهیم که

می‌شود $|A + 2I|$. طبق مورد (۲) درس‌نامه، به توان ۳ می‌رسد و از دترمینان خارج می‌شود:

$$|-2I_{3 \times 3}| = (-2)^3 |I_{3 \times 3}| = -8 \times 1 = -8$$

۳۴ - گزینه ۳

گام ۶ (اعمال شرط $|A| = 2$)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow ad - bc = 2 \quad (1)$$

گام ۷ (اعمال شرط $B^T = 2I$) اول B^T را به دست می‌آوریم:

$$B^T = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+dc & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+dc & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا معادله $B^T = 2I$ را می‌سازیم:

$$\diamond c+dc=0 \Rightarrow c(1+d)=0$$

$$\diamond 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \quad (2) \Rightarrow c(1+d)=0 \Rightarrow c=0 \text{ یا } d=-1$$

$$c=0 \text{ امکان ندارد چون در این حالت } ac \text{ به جای } 1 \text{ می‌شود صفر، پس } d=-1 \text{ را می‌پذیریم.}$$

$$2b^2=2 \Rightarrow b=\pm 1$$

حالا سبزه‌ها:

$$\text{یک بار } b=1 \text{ و } d=-1 \text{ و بار دیگر } b=-1 \text{ و } d=-1 \text{ را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:}$$

(II)

(I)

$$\diamond (I): -a-c=2 \Rightarrow a+c=-2 \xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1 \quad \checkmark$$

$$\diamond (II): -a+c=2 \xrightarrow{ac=1} \text{ دو عدد صحیحی که اختلافشان ۲ و ضربشان ۱ باشد نداریم.}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پس B می‌شود:

◇ ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازه‌اش است:

۳ طول تصویر $\vec{a}$ بر (امتداد) بردار $\vec{b}$ می‌شود:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

گام ۸ (تحلیل خواسته سؤال): طبق مورد (۳) درس‌نامه، طول تصویر قائم بردار $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

بر بردار $\vec{a}$ می‌شود:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{x}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot (\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})|}{|\vec{a}|} = \frac{|\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}|}{|\vec{a}|} \quad (*)$$

گام ۹ (محاسبه خواسته سؤال): طبق مورد (۲) درس‌نامه $\vec{a} \cdot \vec{a}$ همان $|\vec{a}|^2$ است.

از طرفی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، $\vec{a} \cdot \vec{b}$ می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

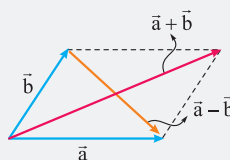
این‌ها را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|\vec{a}'| = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{b}|}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| + \frac{1}{2} |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\frac{3}{2} |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{3}{2}$$

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

☆ نکته ۱ قطره‌های متوازی‌الاضلاع که روی $\vec{a}$

و $\vec{b}$ می‌سازیم، همان $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ هستند. طبق شکل، قطر هم‌مبدأ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\vec{a} + \vec{b}$ و قطر دیگر $\vec{a} - \vec{b}$ است.



۲ در حالتی که $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ است، طول ضلع‌های متوازی‌الاضلاع برابر می‌شوند؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع مطابق شکل، تبدیل به لوزی می‌شود. از طرفی در لوزی قطرها نیمساز زوایای داخلی لوزی‌اند و بر هم عمودند:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} \text{ نیمساز زاویه بین } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ است.}$$

طول بردارهای $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برابر ۱ هستند؛ پس طبق نکته بالا، متوازی‌الاضلاع شکل زیر که روی این دو بردار ساخته‌ایم، لوزی است؛ پس بردار قرمز، با $\vec{a}$ زاویه 30° می‌سازد و طول هر

چهار ضلع لوزی برابر ۱ است. زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین آبی برابر $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ است، پس مثلث قرمز، یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های 30° و 60° است. طول ضلع رو به زاویه 30° ، نصف وتر است:

$$AH = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

پس:

$$\text{طول تصویر بردار قرمز بر } \vec{a} \text{ همان طول OH است که می‌شود } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

۳۳ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ دترمینان برای ضرب ماتریس‌های مربعی و هم‌رتبه جدا می‌شود، یعنی

$$|ABC| = |A| |B| |C| \quad \text{برای سه ماتریس مربعی و هم‌رتبه } A, B, C \text{ می‌توانیم بنویسیم:}$$

$$2 \text{ ضرب به توان مرتبه می‌رسد و از دترمینان خارج می‌شود: } |KA_{n \times n}| = K^n |A_{n \times n}|$$

$$3 \text{ دترمینان ماتریس هم‌نامی برابر ۱ است: } |I_{3 \times 3}| = |I_{3 \times 3}| = 1$$

گام ۱۰ (ساده‌تر نوشتن تساوی داده‌شده): در $A^T + kA - A$ ، از A می‌توانیم فاکتور بگیریم:

$$|A^T + kA - A| = 125 \Rightarrow |A(A + (k-1)I)| = 125$$

(k-1)A

طبق مورد (۱) درس‌نامه، دترمینان برای ضرب ماتریس‌های مربعی، جدا می‌شود:

$$|A| |A + (k-1)I| = 125 \quad (*)$$

تیزبازی همان‌جا که معادله d را نوشتیم جواب معلوم بود، چون تنها نقطه‌ای که در معادله $3y + 2x = 4$ صدق می‌کند، $(3/5, -1)$ در (4) است؛ ببینید:

$$3(-1) + 2(3/5) = -3 + 6/5 = -3 + 1.2 = -1.8 \neq 4$$

گزینه ۳۶ - ۳۶

درس‌نامه ۱ هر نقطه‌ای که مثل M در شکل مقابل روی بیضی باشد، جمع فاصله‌هایش از کانون‌های بیضی برابر با مقدار ثابت بیضی یعنی $2a$ است:

$$MF + MF' = 2a$$

۲ طول قطر بزرگ بیضی، مطابق شکل مقابل برابر $2a$ است.

۳ در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. در چنین حالتی اگر از M به F و F' وصل کنیم، زاویه‌هایی که MF و MF' با d می‌سازند (α) و (β) برابرند؛ یعنی در شکل مقابل $\alpha = \beta$ است.

گام ۱ (محاسبه زاویه‌های مورد نیاز): در شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه $MF'H'$ یک زاویه 3° داریم؛ پس زاویه دیگرش $90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$ می‌شود.

در نقطه M بر بیضی مماس است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، باید $FMH = F'MH' = 3^\circ$ باشد؛ بنابراین مثلث قائم‌الزاویه FMH هم زاویه‌هایش 3° و 87° اند.

گام ۲ (تحلیل فاصله بین پای عمودها): در مثلث‌های قائم‌الزاویه بالا، ضلع‌های رو به 60° برابر و وترند:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} : MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} : MH \Rightarrow MH' : MH = 1 : 1$$

پس $HH' = MH' + MH = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): M در شکل بالا، روی بیضی است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، جمع فاصله‌هایش از F و F' باید $2a$ باشد. HH' را هم خود سؤال داده $2\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(2a) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2a = 4$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، طول قطر بزرگ بیضی همان $2a = 4$ است.

گزینه ۳۷ - ۳۷

درس‌نامه دوتا از ویژگی‌های بخش‌پذیری را ببینید:

$$a \mid b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a \mid mb \text{ و } \begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b \pm c$$

گام ۱ اول y را بر حسب x می‌نویسیم:

$$4x^2 + xy + 3x - y = 0 \Rightarrow y(x-1) = -4x^2 - 3x \Rightarrow y = \frac{-4x^2 - 3x}{x-1}$$

گام ۲ می‌خواهیم x و y صحیح باشند. y وقتی صحیح است که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد؛ یعنی:

$$x-1 \mid -4x^2 - 3x \quad (1)$$

گام ۳ از طرفی $x-1$ خودش را عاد می‌کند:

$$x-1 \mid x-1 \quad (2)$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال): حالا درایه‌های B^T را به دست می‌آوریم. حواسمان هم هست که $B^T = 2I$ بود:

$$B^T = B^T \times B = (2I) \times B = 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

که حاصل ضرب درایه‌های غیرصفرش می‌شود:

$$2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times 2\sqrt{2} = -32\sqrt{2}$$

گزینه ۴ - ۳۵

درس‌نامه ۱ اگر قرار باشد دایره‌ای مثل شکل مقابل از دو نقطه A و B بگذرد؛ باید مرکزش روی عمودمنصف پاره خط AB باشد.

۲ طبق شکل زیر، قطر بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

۳ دو خط عمود بر هم، شیبشان قرینه معکوس هم است.

۴ اگر نقطه M مثل شکل مقابل، وسط A و B باشد، داریم:

$$M = \frac{A+B}{2}$$

گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، d که از مرکز می‌گذرد بر خط مماس در نقطه $(2, 0)$ عمود است. از طرفی چون دایره از دو نقطه A و B می‌گذرد، باید مرکزش روی عمودمنصف AB باشد؛ پس طبق شکل خط d' مرکز دایره، نقطه برخورد d و d' است.

گام ۲ (پیدا کردن مرکز): d بر خط $y = \frac{3}{2}x - 3$ عمود است؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه $m_d = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$ است. از طرفی d از نقطه $A(2, 0)$ می‌گذرد؛ پس معادله‌اش می‌شود:

$$d: y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 2x = 4$$

d' عمودمنصف AB است؛ پس از وسط AB ، یعنی M می‌گذرد:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(2, 0) + (4/5, 0/5)}{2} = \frac{(6/5, 0/5)}{2} = (3/5, 0/5)$$

از طرفی d' به AB عمود است؛ پس شیبش قرینه معکوس شیب AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0/5 - 0}{4/5 - 2} = \frac{0/5}{-6/5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{d'} = -\frac{1}{m_{AB}} = 3$$

حالا می‌توانیم معادله d' را بنویسیم:

$$d': y - 0/5 = 3(x - 3/5) \Rightarrow y + 3x = 9/5$$

همان نقطه برخورد d و d' یعنی جواب دستگاه است:

$$\begin{cases} 3y + 2x = 4 \\ y + 3x = 9/5 \end{cases}$$

خودش $\rightarrow \begin{cases} 3y + 2x = 4 \\ 3y + 15x = 36/5 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - پایینی}} 13x = 45/5 \Rightarrow x = 3/5$

جای‌گذاری در بالایی $\rightarrow 3y + 2(3/5) = 4 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$

پس $O(3/5, -1)$ مرکز دایره است.

به کمک (۱) و (۲) و ویژگی‌های بخش‌پذیری، x را از سمت راست حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-1 \mid x-1 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 8x} x-1 \mid 8x^2-8x \\ x-1 \mid -8x^2-3x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع سمت راستها}} x-1 \mid (8x^2-8x) + (-8x^2-3x) \Rightarrow x-1 \mid -11x$$

$$\begin{cases} x-1 \mid -11x \\ x-1 \mid x-1 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 11} x-1 \mid 11x-11 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع سمت راستها}} x-1 \mid (11x-11) + (-11x) \Rightarrow x-1 \mid -11 \Rightarrow x-1 \mid \pm 11 \Rightarrow x-1 = \pm 11 \pm 1$$

معادله بالا ۴ تا جواب دارد، پس مسئله هم ۴ جواب دارد.

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

نکته در معادله‌های عادکردنی به فرم $ax+b \mid f(x)$ ، می‌توانیم ریشه عبارت

خطی

خطی، یعنی $x = -\frac{b}{a}$ را در سمت راست معادله جای‌گذاری کنیم:

$$ax+b \mid f(x) \Rightarrow ax+b \mid f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

طبق نکته بالا برای حل معادله عادکردنی $x-1 \mid 8x^2-3x$ ، می‌توانیم ریشه $x-1$ خطی

یعنی $x=1$ را در سمت راست جای‌گذاری کنیم:

$$x-1 \mid 8(1)^2-3(1) \Rightarrow x-1 \mid -11 \Rightarrow x-1 = \pm 11 \Rightarrow x-1 = \pm 11 \pm 1$$

و باز هم ۴ تا جواب داریم.

۳۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

۲ بعضی‌وقت‌ها در معادله بالا، متغیرهای ضریب‌دار، توان‌دار یا ... وجود دارد که عجیب غریب‌اند. این‌جور وقت‌ها، معادله را روی مقادیر مختلف آن پارامتر حالت‌بندی کنید. حواستان باشد که متغیرهای رادیکالی با هر فرجه‌ای، عجیب غریب محسوب نمی‌شوند. بنابراین با خیال راحت می‌توانید فرض کنید اصلاً رادیکالی وجود ندارد.

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه، فرض می‌کنیم رادیکالی وجود ندارد و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ را به دست می‌آوریم.

گام ۲ روی مقادیر x_4 حالت‌بندی می‌کنیم. چون $x_4 = \frac{2}{5}x_3 = 0/4x_3$ باید عددی صحیح باشد، پس x_4 مضرب ۵ است.

$$x_4 = 0: x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$x_4 = 5: x_1 + \frac{2}{5}(5) + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_4 = 10: x_1 + \frac{2}{5}(10) + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

واضح است که تنها جواب معادله بالا $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است.

دیگر x_4 نمی‌تواند ۱۵ یا بیشتر باشد، چون در این حالت سمت راست معادله عددی منفی می‌شود که جواب‌های صحیح و نامنفی ندارد. پس تعداد کل جواب‌ها می‌شود $15 + 6 + 1 = 22$.

۳۹- گزینه ۲

شفاف‌سازی «مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد»؛ یعنی مجموع اعضای برد تابع، عددی فرد است.

درس‌نامه تعداد جایگشت‌های n شیء، که n_1 تای آن‌ها مثل هم و n_2 تای دیگر مثل هم و ... باشند، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots}$$

گام ۱

تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ را به صورت زوج مرتبی می‌نویسیم:

$$f = \{(1, \bigcirc), (2, \bigcirc), (3, \bigcirc), (4, \bigcirc)\}$$

طبق «شفاف‌سازی» اعداد ۱، ۲ و ۴ را باید طوری در جای خالی‌ها قرار بدهیم که مجموعه‌شان فرد بشود.

گام ۲ در سه حالت این اتفاق می‌افتد:

♦ در $\bigcirc$ ها به دونه ۱ داشته باشیم: در این حالت یکی از $\bigcirc$ را با عدد ۱ و ۳ خانه دیگر را با یکی از اعداد ۲ یا ۴ پر می‌کنیم:

تعداد حالت‌های بقیه $\bigcirc$ ها
 $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
 انتخاب جای ۱

♦ در $\bigcirc$ ها سه تا ۱ داشته باشیم: در این حالت $\bigcirc$ را دو جور می‌توانیم پر کنیم:

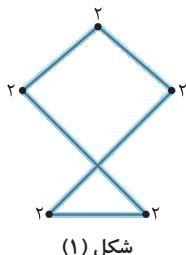
(۱) با اعداد ۱، ۱، ۱ و ۲: که $\frac{4!}{3!} = 4$ جایگشت دارند.

(۲) با اعداد ۱، ۱، ۱ و ۴: که این‌ها هم $\frac{4!}{3!} = 4$ جایگشت دارند.

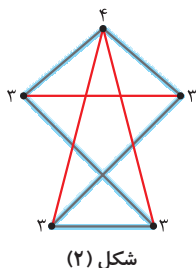
گام ۳ پس مجموعاً $32 + 4 + 4 = 40$ تابع داریم.

۴۰- گزینه ۲

باید با حذف گزینه به جواب برسیم. به دنبال کوچک‌ترین p هستیم؛ پس با کوچک‌ترین گزینه شروع می‌کنیم:



شکل (۱)



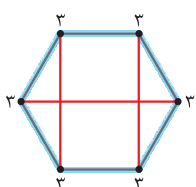
شکل (۲)

۴: باید یک گراف با $\delta \geq 3$ و $p(G) = 5$ بسازیم. گراف شکل (۱) را در نظر بگیرید که در آن $p = 5$ و $\delta(G) = 2$ و خودش یک دور به طول ۵ است. برای این‌که $\delta(G) \geq 3$ بشود، باید یک یال به هر رأس این گراف متصل بشود، یک حالتش یال‌های قرمز شکل (۲):

با اضافه کردن این یال‌ها هم‌چنان دور به طول ۵ در گراف باقی می‌ماند؛ پس در حالتی که $p = 5$ است، طول بلندترین دور ۴ نیست.

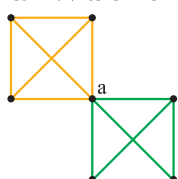
۳: باید یک گراف با $p(G) = 6$ و $\delta(G) \geq 3$ بسازیم.

گراف مقابل را در نظر بگیرید که در آن $p = 6$ و $\delta(G) = 2$ و خودش یک دور به طول ۶ است. برای این‌که $\delta(G) \geq 3$ بشود، باید به هر رأس، حداقل یک یال متصل بشود. یک حالتش یال‌های قرمز مقابل:



با اضافه کردن این یال‌ها هم‌چنان دور به طول ۶ در گراف حضور دارد؛ پس در حالتی که $p = 6$ است هم امکان ندارد طول بلندترین دور ۴ باشد.

۲: برای این حالت، گراف زیر وجود دارد. در بخش زرد و همین‌طور سبز، طول بلندترین دور برابر ۴ است. ممکن است بگویید خب اگر از بخش زرد شروع کنیم و به بخش سبز برویم چه‌طور؟



این‌جوری نمی‌توانیم دور به طول بیشتر از ۴ پیدا کنیم؟ نه! چون برای رفتن از یک بخش به بخش دیگر باید از رأس a بگذریم و برای برگشت به همان بخش باز هم باید از a بگذریم؛ پس همین گزینه جواب است.

۴۴ - گزینه ۲

یکای W.s (وات ثانیه) معادل یکای ژول است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$25 \text{ kW.h} = 25 \times 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 90 \times 10^6 \text{ W.s} = 90 \text{ MJ}$$

۴۵ - گزینه ۴

درس‌نامه معادله مکان - زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت Y را

رو به پایین در نظر گرفتیم):

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + y_0$$

$\uparrow$ شتاب گرانش (m/s^2)
 $\downarrow$ مکان اولیه (m)
 $\downarrow$ زمان (s)

از آن‌جا که هر دو ثانیه یک گلوله از ارتفاع h رها می‌شود، پس گلوله اول در لحظه $t_1 = 0 \text{ s}$ گلوله دوم در لحظه $t_2 = 2 \text{ s}$ و گلوله سوم در لحظه $t_3 = 4 \text{ s}$ رها می‌شود. از طرفی چون در لحظه رها شدن گلوله سوم ($t_3 = 4 \text{ s}$)، گلوله اول به زمین رسیده است، پس $4 - 0 = 4 \text{ s}$ طول کشیده است تا گلوله اول ارتفاع h را طی کند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم (در تمام مراحل، جهت +Y را رو به پایین در نظر گرفتیم):

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \quad \frac{y=h, g=10 \text{ m/s}^2, t_3=4 \text{ s}, y_0=0 \text{ m}}{t_3=4 \text{ s}, y_0=0 \text{ m}} \rightarrow h = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 + 0 = 80 \text{ m}$$

در لحظه $t_3 = 4 \text{ s}$ (لحظه رها شدن گلوله سوم)، گلوله دوم به مدت $4 - 2 = 2 \text{ s}$ حرکت کرده است. ارتفاعی را که گلوله دوم در مدت زمان ۲ s طی کرده است، حساب می‌کنیم.

$$y_2 = \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \quad \frac{g=10 \text{ m/s}^2, t_2=2 \text{ s}, y_0=0 \text{ m}}{y_0=0 \text{ m}} \rightarrow y_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 + 0 = 20 \text{ m}$$

تله ۱ زهرداره! هواستون باشه که سوال، ارتفاع گلوله دو از زمین را می‌فواهد، نه ارتفاعی که طی کرده است! پس گلوله دوم در این لحظه، از ارتفاع $60 \text{ m} (80 - 20)$ عبور کرده است.

۴۶ - گزینه ۱

درس‌نامه ۱ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$v = at + v_0$$

$\uparrow$ شتاب (m/s^2)
 $\downarrow$ سرعت اولیه (m/s)

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$\uparrow$ شتاب (m/s^2) $\uparrow$ مکان اولیه (m)
 $\downarrow$ سرعت اولیه (m/s) $\downarrow$ زمان (s)

متحرک دوم ۳ s دیرتر از متحرک اول شروع به حرکت کرده است. برای این‌که وضعیت این دو متحرک را نسبت به هم بسنجیم، باید مکان و تندی متحرک اول را ۳ s پس از لحظه شروع حرکتش پیدا کنیم.

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_{0,1} t_1 + x_{0,1}$$

$$\frac{a_1 = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2, t_1 = 3 \text{ s}}{v_{0,1} = 0 \text{ m/s}, x_{0,1} = 0 \text{ m}} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3^2 + 0 \times 3 + 0 = \frac{9}{4} \text{ m}$$

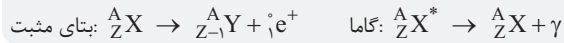
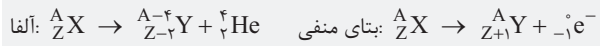
$$v_1 = a_1 t_1 + v_{0,1} \quad \frac{a_1 = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2}{t_1 = 3 \text{ s}, v_{0,1} = 0 \text{ m/s}} \rightarrow v_1 = \frac{1}{2} \times 3 + 0 = \frac{3}{2} \text{ m/s}$$

ما می‌خواهیم ببینیم که چند ثانیه فاصله بین دو متحرک در حال کاهش است. در این لحظه، متحرک اول با تندی $\frac{3}{2} \text{ m/s}$ از مکان $\frac{9}{4} \text{ m}$ عبور و متحرک دوم از مبدأ محور ($x_2 = 0 \text{ m}$) شروع به حرکت می‌کند. چون تندی متحرک اول ($\frac{3}{2} \text{ m/s}$) بیشتر از تندی متحرک دوم (0 m/s) است، پس دو متحرک از هم دور می‌شوند و تا وقتی که تندی

فیزیک

۴۱ - گزینه ۲

درس‌نامه فرایند واپاشی آلفا، بتای منفی، بتای مثبت و گاما به صورت زیر است.



در فرایند واپاشی آلفا، عدد جرمی هسته دختر، ۴ واحد از عدد جرمی هسته مادر کم‌تر است و در بقیه فرایندهای واپاشی، عدد جرمی تغییر نمی‌کند.

۴۲ - گزینه ۳

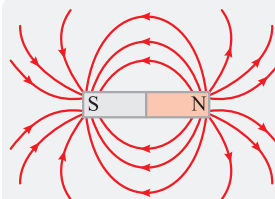
کام ۱ خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند؛ پس با توجه به شکل، $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ است. (۱ و ۲ پُر!) (۳ پُر!)

کام ۲ از آن‌جا که تعداد خطوط میدان الکتریکی خارج‌شده از q_1 نسبت به تعداد خطوط میدان الکتریکی واردشده به q_2 بیشتر است؛ پس $|q_1| < |q_2|$ است. (۴ پُر!)

مشاوره این سؤال و شکل آن دقیقاً از تمرین کتاب درسی آمده است. پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی‌تر بگیرید.

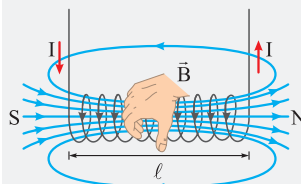
۴۳ - گزینه ۱

درس‌نامه ۱ خطوط میدان مغناطیسی در



خارج از آهن‌ربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

۲ تشخیص جهت میدان مغناطیسی سیم‌لوله حامل جریان، طبق قاعده دست راست، انگشت شستمان را در جهت جریان عبوری از سیم‌لوله قرار می‌دهیم و چهار انگشتان را خم می‌کنیم. در این صورت، جهت خم شدن چهار انگشتان، جهت میدان مغناطیسی سیم‌لوله را نشان می‌دهد.



۳ از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی استفاده می‌کنیم:

الف وقتی شار مغناطیسی افزایشی است:

میدان مغناطیسی القایی (ثانویه) در جهت مخالف میدان مغناطیسی اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند.

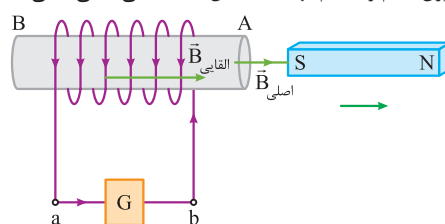
$$\text{اصلی } \vec{B} \leftarrow \quad \text{القایی } \vec{B}' \rightarrow$$

ب وقتی شار مغناطیسی کاهش می‌یابد:

میدان مغناطیسی القایی (ثانویه) هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند.

$$\text{اصلی } \vec{B} \leftarrow \quad \text{القایی } \vec{B}' \leftarrow$$

کام ۱ چون آهن‌ربا از سیم‌لوله دور می‌شود، پس میدان مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله کاهش و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از آن نیز کاهش می‌یابد؛ بنابراین طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی درون سیم‌لوله، هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی یعنی به سمت راست است. طبق قاعده دست راست، اگر انگشت شستمان را در جهت جریان القایی قرار بدهیم، آن‌گاه جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله را نشان می‌دهد؛ پس طبق شکل بالا، جهت جریان القایی عبوری از گالوانومتر از a به b است. (۲ و ۴ پُر!)



از سیم‌لوله را نشان می‌دهد؛ پس طبق شکل بالا، جهت جریان القایی عبوری از گالوانومتر از a به b است. (۲ و ۴ پُر!)

کام ۲ از آن‌جا که جهت میدان مغناطیسی القایی درون سیم‌لوله از B به سمت A است؛ پس A و B به ترتیب قطب‌های N و S هستند. (۳ پُر!)

۴۹- گزینه ۳

درس نامه قانون دوم نیوتون:

تغییرات
سرعت (m/s)
شتاب (m/s²)
جرم (kg)
 $F_{net} = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$
نیروی خالص (N)
مدت زمان (s)

اگر جهت شرق را مثبت و جهت غرب را منفی در نظر بگیریم،
 $v_1 = -5 \text{ m/s}$ و $v_2 = +5 \text{ m/s}$ و $F = +2 \text{ N}$ است. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:
 $F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{F = 2 \text{ N}, m = 0.4 \text{ kg}}{\Delta v = v_2 - v_1 = 5 - (-5) = 10 \text{ m/s}} \rightarrow 2 = 0.4 \times \frac{10}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s}$

۵۰- گزینه ۴

اگر بخواهیم این طناب در آستانه پاره شدن قرار بگیرد، نیروی کشش
آن باید 43 N باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:
 $F_{net} = ma \Rightarrow mg - T = ma$
 $m = 50 \text{ kg}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, T = 43 \text{ N} \rightarrow 50 \times 9.8 - 43 = 50a$
 $\Rightarrow a = \frac{437}{50} = 8.74 \text{ m/s}^2$

۵۱- گزینه ۱

نیروی خالص F به هر دو جسم m_1 و m_2 وارد می‌شود؛ پس طبق قانون دوم
نیوتون می‌توانیم بنویسیم:
 $F_{net,1} = F_{net,2} = F \rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2$
 $a_1 = 12 \text{ m/s}^2 \rightarrow m_1 \times 12 = m_2 \times 4 \Rightarrow m_2 = 3m_1$
حالا می‌خواهیم ببینیم همین نیروی خالص F به جسمی با جرم $m_2 - m_1$ چه
شتابی می‌دهد. دوباره از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم.

$F = (m_2 - m_1)a \rightarrow F = (3m_1 - m_1)a$
 $\Rightarrow \frac{F}{m_1} = 2a \rightarrow \frac{F}{m_1} = 12 \Rightarrow 12 = 2a \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$

۵۲- گزینه ۲

درس نامه ۱ نیروی مرکزگرا: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی خالصی در
راستای شعاع دایره و به سمت مرکز آن وارد می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت
دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم. نیروی مرکزگرا نیروی جدیدی نیست و نیروهای
گرانشی، الکتریکی و ... می‌توانند نیروی مرکزگرا را تأمین کنند. قانون دوم نیوتون در حرکت
دایره‌ای یکنواخت به صورت مقابل است.

تندی (m/s)
جرم (kg)
 $F_{net} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow F_{net} = m \frac{v^2}{r}$
شعاع (m)

۲ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:
ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح
 $f_{s,max} = \mu_s F_N \rightarrow$ نیروی عمودی سطح (N)
بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)

از آنجا که سکه در آستانه لغزش است، پس بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی
مرکزگرا را تأمین می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$F = f_{s,max} \rightarrow \frac{F = m \frac{v^2}{r}}{f_{s,max} = \mu_s mg} \rightarrow m \frac{v^2}{r} = \mu_s mg$
 $\frac{T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 0.4}{v} = \frac{\pi}{v}}{r = 0.4 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow \frac{4\pi}{v} \times 10 = \mu_s \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0.26$

دو متحرک با هم یکسان نشود، این دور شدن از هم ادامه پیدا می‌کند؛ پس باید ببینیم که در
چه لحظه‌ای پس از لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ تندی دو متحرک یکسان می‌شود.

$v_1' = v_2 \rightarrow v_1 + a_1 t = v_2 + a_2 t \rightarrow a_1 t + v_1 = a_2 t + v_2$
 $\frac{a_1 = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2, v_1 = \frac{3}{2} \text{ m/s}}{a_2 = 2 \text{ m/s}^2, v_2 = 0 \text{ m/s}} \rightarrow \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} = 2t + 0 \Rightarrow \frac{3}{2} t = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$

این یعنی تا 1 s پس از شروع حرکت متحرک دوم (4 s پس از شروع حرکت متحرک اول)
دو متحرک در حال دور شدن از یکدیگر هستند و از این لحظه به بعد تا زمانی که دو متحرک
به هم برسند، فاصله دو متحرک در حال کاهش است؛ پس باید ببینیم در چه لحظه‌ای
دو متحرک به هم می‌رسند.

$x_1' = x_2 \rightarrow \frac{x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}{\frac{1}{2} a_1 t'^2 + v_1 t' + x_1 = \frac{1}{2} a_2 t'^2 + v_2 t' + x_2}$
 $\frac{a_1 = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2, v_1 = \frac{3}{2} \text{ m/s}, x_1 = \frac{9}{4} \text{ m}}{a_2 = 2 \text{ m/s}^2, v_2 = 0 \text{ m/s}, x_2 = 0 \text{ m/s}} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} t'^2 + \frac{3}{2} t' + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \times 2 t'^2 + 0 \times t' + 0$
 $\Rightarrow \frac{3}{4} t'^2 - \frac{3}{2} t' - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow t' = 3 \text{ s} \checkmark \text{ و } t' = -1 \text{ s} \times$

بنابراین، متحرک دوم 3 s پس از شروع حرکتش به متحرک اول می‌رسد. از آنجا که 1 s طول
می‌کشد تا تندی دو متحرک یکسان شود؛ پس به مدت 2 s ($3 - 1$) فاصله بین دو متحرک
در حال کاهش است تا به هم برسند. بعدش هم که متحرک دوم از متحرک اول سبقت می‌گیرد و دور می‌شه.

۴۷- گزینه ۴

چون متحرک B در لحظه $t = 4 \text{ s}$ به متحرک A
رسیده است، پس مکان دو متحرک در این لحظه
یکسان است. نمودار مکان - زمان متحرک A را
داریم؛ پس مکان متحرک A در لحظه $t = 4 \text{ s}$ را که
برابر با مکان متحرک B در این لحظه است می‌توانیم
پیدا کنیم.

$\frac{x_A - 20}{4 - 0} = \frac{26 - 20}{3 - 0} \Rightarrow x_A - 20 = 8 \Rightarrow x_A = 28 \text{ m}$

حالا همه چیز را برای محاسبه شتاب متحرک B داریم و کافی است داده‌ها را در معادله مکان
- زمان آن جای گذاری کنیم.

$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0,B} t + x_{0,B}$
 $\frac{x_B = x_A = 28 \text{ m}, t = 4 \text{ s}}{v_{0,B} = 12 \text{ m/s}, x_{0,B} = 0 \text{ m}} \rightarrow 28 = \frac{1}{2} a_B \times 4^2 + 12 \times 4 + 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} a_B = -2 \Rightarrow a_B = -2/5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow a_B = -2/5 \hat{i}$

۴۸- گزینه ۱

درس نامه اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2
باشد، آن گاه شتاب متوسط آن در این بازه زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

تغییرات سرعت (m/s)
 $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
مدت زمان (s)

گام ابتدا سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_2 = 4 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم.

$v = 3t^2 - 8$
 $t_1 = 2 \text{ s} \rightarrow v_1 = 3 \times 2^2 - 8 = 4 \text{ m/s}$
 $t_2 = 4 \text{ s} \rightarrow v_2 = 3 \times 4^2 - 8 = 40 \text{ m/s}$

حالا شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 را حساب می‌کنیم.

$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
 $\frac{v_1 = 4 \text{ m/s}, v_2 = 40 \text{ m/s}}{t_1 = 2 \text{ s}, t_2 = 4 \text{ s}} \rightarrow a_{av} = \frac{40 - 4}{4 - 2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ m/s}^2$

۵۶- گزینه ۳

فاصله بین جبهه‌های موج روی آب در ناحیه A بیشتر از فاصله بین جبهه‌های موج روی آب در ناحیه B است؛ پس طول موج در ناحیه A بیشتر از طول موج در ناحیه B است ($\lambda_A > \lambda_B$). از طرفی با ورود امواج روی آب از ناحیه عمیق به ناحیه کم عمق، طول موج و تندی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین چون با ورود امواج روی آب از ناحیه A به ناحیه B، طول موج آن کاهش می‌یابد، پس تندی انتشار موج و عمق آب در ناحیه A بیشتر از تندی انتشار موج و عمق آب در ناحیه B است.

۵۷- گزینه ۳

درس نامه وقتی یک پرتوی نور از یک محیط رقیق وارد محیط غلیظ‌تر (با ضریب شکست بیشتر) می‌شود، می‌شکند و به خط عمود بر مرز دو محیط نزدیک‌تر شده و زاویه کم‌تری با آن می‌سازد. هر چه قدر طول موج نور کوتاه‌تر باشد، ضریب شکست یک محیط معین برای آن بیشتر و در نتیجه زاویه انحراف پرتوی نور بیشتر می‌شود.

طول موج نور قرمز بیشتر از طول موج نور آبی است ($\lambda_{\text{قرمز}} > \lambda_{\text{آبی}}$)؛ بنابراین ضریب شکست شیشه برای نور قرمز کمتر از ضریب شکست آن برای نور آبی است و در نتیجه نور قرمز با ورود از هوا به شیشه، نسبت به نور آبی کمتر منحرف شده و پرتوها از هم جدا می‌شوند (۲) و (۴) پرتو. از طرفی چون نور قرمز و آبی از هوا وارد شیشه می‌شوند، پس به خط عمود نزدیک می‌شوند و پس از آن با خروج از شیشه و ورود دوباره به هوا، از خط عمود دور می‌شوند و چون ضریب شکست هوا برای هر دو نور آبی و قرمز یکسان است، پس در یک جهت منتشر می‌شوند (۱) پرتو.

۵۸- گزینه ۱

طبق رابطه $K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W$ ، با کاهش طول موج نور فرودی، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ($K_{\max}$) افزایش می‌یابد.

۵۹- گزینه ۲

مدل اتمی بور برای وقتی که بیش از یک الکترون به دور هسته می‌گردد، به کار نمی‌رود (عبارت ج)، زیرا در مدل بور، نیروی الکتریکی‌ای که یک الکترون بر الکترون دیگر وارد می‌کند، به حساب نیامده است. همچنین این مدل نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد (عبارت ب). برای مثال، مدل بور نمی‌تواند توضیح دهد که چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی در طیف گسیلی گاز هیدروژن اتمی با یکدیگر متفاوت است.

۶۰- گزینه ۴

درس نامه نیمه عمر: اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \rightarrow \text{تعداد هسته‌های اولیه} \rightarrow N_0, n = \frac{t}{T_{1/2}} \rightarrow \text{مدت زمان (s)}, n = \frac{t}{T_{1/2}} \rightarrow \text{نیمه عمر (s)}$$

گام ۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را به دست می‌آوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N = \frac{1}{16} N_0} \frac{1}{16} N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

گام ۲ حالا می‌توانیم نیمه‌عمر ماده را حساب کنیم.

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \xrightarrow{n=4, t=2h} 4 = \frac{t}{T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{t}{4} = \frac{2h}{4} = \frac{1}{2}h$$

مشاوره در این کنکور و در کنکور تجربی ۱۴۰۴ نوبت اول هم از عدد ۳/۱۴ استفاده شده بود. اگر عدد ۳/۱۴ و مضارب آن مثل ۶/۲۸ را دیدید، حواستان باشد که با عدد ۳ در حل سؤال سروکار دارید.

۵۳- گزینه ۳

درس نامه تندی انتشار موج عرضی در تار مرتعش تحت کشش:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \rightarrow \text{نیروی کشش تار (N)} \\ \text{سطح مقطع تار (m}^2\text{)} \rightarrow \rho A \\ \downarrow \\ \text{چگالی تار (kg/m}^3\text{)}$$

کافی است از رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ به صورت نسبیتی استفاده کنیم.

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B} \times \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{A_B}{A_A}}$$

$$\frac{\rho_A = \rho_B = \rho_{\text{مس}}, v_A = 100 \text{ m/s}}{F_A = F_B, A_A = 4A_B} \rightarrow \frac{100}{v_B} = \sqrt{1 \times 1 \times \frac{1}{4}} \Rightarrow v_B = 200 \text{ m/s}$$

۵۴- گزینه ۴

وقتی چشمه نور از ناظر دور می‌شود، طول موج افزایش و بسامد کاهش می‌یابد که به آن اصطلاحاً انتقال به سرخ می‌گویند و وقتی چشمه نور به ناظر نزدیک می‌شود، طول موج کاهش و بسامد افزایش می‌یابد که به آن اصطلاحاً انتقال به آبی می‌گویند.

مشاوره خط به خط کتاب درسی را بخوانید و تمام شکل‌ها و جزئیات آن را درک کنید. اگر کتاب درسی را خوانده باشید، از پس این سؤال برآمدید.

۵۵- گزینه ۲

درس نامه ۱ اندازه نیروی کشسانی فنر:

$$\text{ثابت فنر (N/m)} \uparrow \\ F_e = k\Delta l \rightarrow \text{تغییر طول فنر (m)}$$

۲ قانون دوم نیوتون:

$$F_{\text{net}} = m a \rightarrow \text{شتاب (m/s}^2\text{)} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \text{جرم (kg)} \quad \quad \quad \text{نیروی خالص (N)}$$

۳ انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر:

$$\text{ثابت فنر (N/m)} \uparrow \\ E = \frac{1}{2} k A^2 \\ \downarrow \\ \text{دامنه نوسان (m)}$$

گام ۱ از آن‌جا که وزنه از فنر آویزان شده و در حالت تعادل

است، می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow F_e - mg = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg$$

$$\frac{\Delta l = 2/\Delta \text{ cm} = 2/\Delta \times 10^{-2} \text{ m}}{m = 2 \text{ kg}, g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow k \times 2/\Delta \times 10^{-2} = 2 \times 10$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \times 10^2}{2/\Delta} = 80 \text{ N/m}$$

گام ۲ از طرفی چون بیشینه انرژی جنبشی سامانه جرم - فنر ($K_{\max}$) برابر با انرژی مکانیکی (E) آن است، پس انرژی مکانیکی سامانه (E) را حساب می‌کنیم.

$$K_{\max} = E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{k=80 \text{ N/m}, A=2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}} K_{\max} = \frac{1}{2} \times 80 \times (2 \times 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow K_{\max} = 160 \times 10^{-4} \text{ J} = 16 \text{ mJ}$$

۳ اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت:

میدان الکتریکی (N/C)

$$|\Delta V| = E d$$

فاصله بین دو نقطه در راستای میدان الکتریکی (m)

گام ۱ ابتدا نسبت ظرفیت خازن در حالت دوم (C_۲) به ظرفیت خازن در حالت اول (C_۱) را حساب می‌کنیم.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{K_2}{K_1} \xrightarrow{K_2=3, K_1=1} \frac{C_2}{C_1} = \frac{3}{1} = 3$$

گام ۲ حالا می‌توانیم نسبت انرژی خازن در حالت دوم (U_۲) به انرژی خازن در حالت اول (U_۱) را پیدا کنیم.

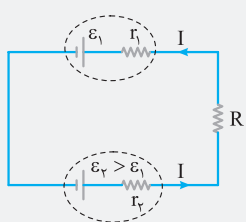
$$U = \frac{1}{2} C V^2 \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 3$$

گام ۳ هم‌چنین، از آن‌جا که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن و فاصله بین صفحه‌های آن ثابت است، پس میدان الکتریکی بین دو صفحه نیز ثابت است.

$$E = \frac{V}{d} \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{V_1=V_2, d_1=d_2} \frac{E_2}{E_1} = 1$$

۶۳ - گزینه ۲

شفاف‌سازی دو باتری مخالف یکدیگر بسته شده‌اند و چون $\epsilon_1 > \epsilon_2$ است، پس جهت جریان در مدار ساعتگرد است.



گام ۱ مدار مقابل شامل دو باتری است که در جهت مخالف یکدیگر بسته شده‌اند. در این مدار چون $\epsilon_2 > \epsilon_1$ است، پس جهت جریان کل مدار به صورت پادساعتگرد است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

مقاومت معادل مدار (Ω)

۲ توان ورودی باتری:

$$P_{\text{ورودی باتری}} = \epsilon_1 I + r_1 I^2$$

جریان (A)

۳ توان خروجی باتری:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = \epsilon_1 I - r_1 I^2$$

گام ۴ با توجه به این که باتری (۱) به عنوان تولیدکننده و باتری (۲) به عنوان مصرف‌کننده در مدار عمل می‌کنند، جریان الکتریکی در این مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{18V - 6V}{3\Omega + 1\Omega + 2\Omega} = \frac{12}{6} = 2A$$

گام ۵ حالا می‌توانیم نسبت توان ورودی باتری (۲) به توان خروجی باتری (۱) را حساب کنیم.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\epsilon_2 I + r_2 I^2}{\epsilon_1 I - r_1 I^2} = \frac{6V \times 2A + 2\Omega \times 2^2 A^2}{18V \times 2A - 1\Omega \times 2^2 A^2} = \frac{12 + 8}{36 - 4} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

۶۴ - گزینه ۳

گام ۱ چگالی: نسبت جرم به حجم ماده همگن

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow (kg/m^3) \text{ چگالی}$$

۲ مقاومت الکتریکی جسم رسانا در دمای ثابت:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

مقاومت ویژه (Ω.m)
طول (m)
مساحت مقطع (m^۲)
مقاومت الکتریکی (Ω)

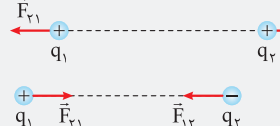
۶۱ - گزینه ۴

قانون کولن: ۱ درس‌نامه

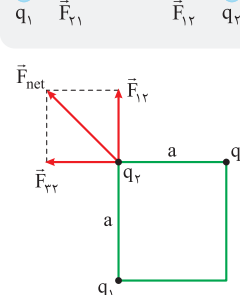
$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

بار الکتریکی (C)
بار الکتریکی (C)
فاصله بین دو بار (m)
ثابت کولن (N.m^۲/C^۲)

۲ دو بار الکتریکی همنام یکدیگر را دفع می‌کنند.



۳ دو بار الکتریکی ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.



گام ۱ چون هر سه بار الکتریکی یکسان‌اند، پس می‌توانیم فرض کنیم که بارها مثبت‌اند. در این حالت، نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_۲ را مطابق شکل (الف) حساب می‌کنیم.

$$F_{12} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \xrightarrow{|q_1|=|q_2|=|q|, r_{12}=a} F_{12} = \frac{k |q|^2}{a^2}$$

$$F_{23} = k \frac{|q_2| |q_3|}{r_{23}^2} \xrightarrow{|q_2|=|q_3|=|q|, r_{23}=a} F_{23} = \frac{k |q|^2}{a^2}$$

$$F_{net} = \sqrt{F_{12}^2 + F_{23}^2}$$

$$F_{12} = F_{23} = \frac{k |q|^2}{a^2} \rightarrow F_{net} = \sqrt{\left(\frac{k |q|^2}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{k |q|^2}{a^2}\right)^2} = \sqrt{2} \frac{k |q|^2}{a^2}$$

گام ۲ نیروی الکتریکی‌ای را که q_۱ به q_۲ وارد می‌کند هم به دست می‌آوریم تا در گام بعدی بتوانیم با F_{net} مقایسه‌اش کنیم.

$$F_{12} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \xrightarrow{|q_1|=|q_2|=|q|, r_{12}=\sqrt{2}a} F_{12} = \frac{k |q|^2}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{k |q|^2}{2a^2}$$

گام ۳ سؤال از ما نسبت $\frac{F_{net}}{F_{12}}$ را می‌خواهد و ما هم

$$\frac{F_{net}}{F_{12}} = \frac{\sqrt{2} \frac{k |q|^2}{a^2}}{\frac{k |q|^2}{2a^2}} = 2\sqrt{2}$$

حسابش می‌کنیم.

۶۲ - گزینه ۱

گام ۱ ظرفیت خازن تخت به ساختمان آن بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m^2) \text{ مساحت هر یک از صفحه‌ها}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m) \text{ فاصله صفحات از هم}$$

ضریب گذردهی الکتریکی خلا (F/m)

۲ انرژی ذخیره‌شده در خازن:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow (V) \text{ اختلاف پتانسیل الکتریکی}$$

ظرفیت خازن (F)

۶۷- گزینه ۳



درس نامه اندازه میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله:

جریان عبوری از سیم‌لوله (A) و تعداد حلقه‌های سیم‌لوله

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \quad \text{و} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

طول سیم‌لوله (m)

کافی است داده‌ها را از رابطه زیر جای گذاری کنیم و تعداد حلقه‌های سیم‌لوله را حساب کنیم.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \quad \begin{matrix} B = 1.57 \times 10^{-4} T, I = 2/5 A \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}, \ell = 1 \times 10^{-2} m \end{matrix}$$

$$1.57 \times 10^{-4} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \times 2/5}{1 \times 10^{-2}}$$

$$\pi = 3/14 \rightarrow N = \frac{1.57 \times 10^{-4} \times 10^{-1}}{4 \times 3/14 \times 10^{-7} \times 2/5} = 500$$

دوباره طراح، عدد π را $3/14$ در نظر گرفته بود. هاستون به این عدد π باشد.

۶۸- گزینه ۴



درس نامه شار مغناطیسی عبوری از پیچه:

میدان مغناطیسی (T) زاویه بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با بردار میدان مغناطیسی

$$\Phi = BA \cos \theta \rightarrow \text{شار مغناطیسی (Wb)}$$

مساحت (m²)

θ زاویه بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه و بردار میدان مغناطیسی است. این زاویه (θ) متمم زاویه بین بردار میدان مغناطیسی با سطح حلقه است.

کافی است شار مغناطیسی عبوری از سطح حلقه در حالت‌های (الف) و (ب) را حساب کنیم؛ سپس تغییرات آن را به دست بیاوریم.

$$\Phi_1 = B_1 A_1 \cos \theta_1 \quad \begin{matrix} B_1 = 0.5 T \\ A_1 = 4 \times 10^{-4} m^2, \theta_1 = 0^\circ \end{matrix} \rightarrow \Phi_1 = 0.5 \times 4 \times 10^{-4} \times 1 = 2 \times 10^{-4} Wb$$

$$= 2 \times 10^{-4} Wb$$

$$\Phi_2 = B_2 A_2 \cos \theta_2 \quad \begin{matrix} B_2 = 0.5 T \\ A_2 = 4 \times 10^{-4} m^2, \theta_2 = 90^\circ \end{matrix} \rightarrow \Phi_2 = 0.5 \times 4 \times 10^{-4} \times 0 = 0 Wb$$

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad \begin{matrix} \Phi_2 = 0 Wb \\ \Phi_1 = 2 \times 10^{-4} Wb \end{matrix} \rightarrow \Delta \Phi = 0 - 2 \times 10^{-4} = -2 \times 10^{-4} Wb$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در حین چرخش حلقه از حالت (الف) به حالت (ب)، شار مغناطیسی عبوری از سطح حلقه $2 \times 10^{-4} Wb$ کاهش می‌یابد.

۶۹- گزینه ۲



درس نامه ۱ فشار مطلق در عمق h از سطح آزاد مایع:

چگالی مایع (kg/m³) عمق (m)

$$P = \rho g h + P_0 \rightarrow \text{فشار جو (Pa)}$$

شتاب گرانش (m/s²)

۲ فشار پیمانه‌ای (P_g): اختلاف فشار مطلق و فشار جو. فشار مطلق $P_g = P - P_0$ فشار جو

۳ ابتدا ارتفاع مایع را حساب می‌کنیم.

$$V = Ah \quad \begin{matrix} V = 2/5 \times 10^{-3} cm^3 \\ A = 5 \times 10^{-2} cm^2 \end{matrix} \rightarrow 2/5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-2} h \Rightarrow h = 5 \times 10^{-2} cm = 0.5 m$$

۴ اول ببینیم این که جرم سیم A نصف جرم سیم B است، چه اطلاعاتی به ما می‌دهد.

$$m_A = \frac{1}{2} m_B \xrightarrow{m = \rho V} \rho_A V_A = \frac{1}{2} \rho_B V_B \xrightarrow{\frac{\rho_A = \rho_B}{V = AL}} \rightarrow$$

$$A_A L_A = \frac{1}{2} A_B L_B \xrightarrow{L_A = 2 L_B} A_A \times 2 L_B = \frac{1}{2} A_B L_B \Rightarrow \frac{A_B}{A_A} = 4$$

۵ حالا نسبت مقاومت الکتریکی سیم A به مقاومت الکتریکی سیم B را می‌نویسیم و حسابش می‌کنیم.

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A}$$

$$\begin{matrix} \rho_A = \rho_B, L_A = 2 L_B \\ \frac{A_B}{A_A} = 4 \end{matrix} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = 1 \times \frac{2 L_B}{L_B} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۶۵- گزینه ۲



درس نامه ۱ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر

یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) $\rightarrow R = \frac{V}{I}$ مقاومت الکتریکی (Ω)
جریان الکتریکی (A) $\rightarrow R = \frac{V}{I}$

۲ مقاومت معادل دو مقاومت موازی R_1 و R_2 :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۳ چون دو مقاومت $R_1 = 6 \Omega$ و $R_2 = 24 \Omega$ به صورت موازی به هم وصل شده‌اند، پس اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $R_1 = 6 \Omega$ برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل آن‌ها ($R_{1,2}$) است. مقاومت معادل دو مقاومت $R_1 = 6 \Omega$ و $R_2 = 24 \Omega$ را حساب می‌کنیم.

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 24}{6 + 24} = \frac{24}{3} = 8 \Omega$$

۴ حالا نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $R_2 = 24 \Omega$ به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $R_1 = 6 \Omega$ را به دست می‌آوریم (دقت کنید که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $R_1 = 6 \Omega$ برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر

$$\text{مقاومت } R_{1,2} = \frac{24}{8} \Omega \text{ است.}$$

$$\frac{V_2}{V_{1,2}} = \frac{R_2 I}{R_{1,2} I} = \frac{R_2}{R_{1,2}} = \frac{24}{8} = \frac{3}{1}$$

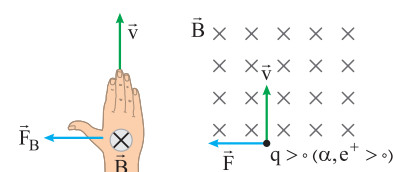
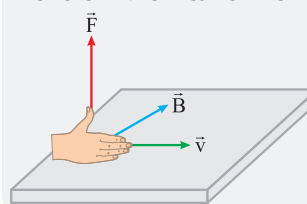
۶۶- گزینه ۱



درس نامه جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار به کمک قاعده دست راست

تعیین می‌شود. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت

ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد (شکل مقابل را ببینید).



علامت هر دو ذره α و e^+ مثبت است. طبق قاعده دست راست، جهت نیروی وارد بر هر دو ذره را که منجر به انحراف آن‌ها می‌شود، پیدا می‌کنیم.

۷۲- گزینه ۳

درس نامه انرژی جنبشی جسمی که با تندی v حرکت می‌کند:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow (m/s) \text{ تندی}$$

حالت اول: در ابتدا، انرژی جنبشی پدر نصف انرژی جنبشی پسر است. ببینیم از این، چه اطلاعاتی می‌توانیم به دست بیاوریم.

$$K_{\text{پدر}} = \frac{1}{2}K_{\text{پسر}} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{2}m_{\text{پدر}}v_{\text{پدر}}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}m_{\text{پسر}}v_{\text{پسر}}^2$$

$$\xrightarrow{m_{\text{پدر}} = 2m_{\text{پسر}}} \frac{1}{2} \times 2m_{\text{پسر}}v_{\text{پدر}}^2 = \frac{1}{2}m_{\text{پسر}}v_{\text{پسر}}^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} v_{\text{پسر}} = 2v_{\text{پدر}}$$

حالت دوم: در این حالت، پدر 2 m/s به تندی خود می‌افزاید و انرژی جنبشی پدر و پسر برابر می‌شود. در این حالت می‌توانیم بنویسیم:

$$K'_{\text{پدر}} = K_{\text{پسر}} \xrightarrow{K' = \frac{1}{2}mv'^2} \frac{1}{2}m_{\text{پدر}}v_{\text{پدر}}'^2 = \frac{1}{2}m_{\text{پسر}}v_{\text{پسر}}^2$$

$$\xrightarrow{m_{\text{پدر}} = 2m_{\text{پسر}}, v_{\text{پسر}} = 2v_{\text{پدر}}} \frac{1}{2} \times 2m_{\text{پسر}}(v_{\text{پدر}} + 2)^2 = \frac{1}{2}m_{\text{پسر}}(2v_{\text{پدر}})^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{2}(v_{\text{پدر}} + 2) = 2v_{\text{پدر}} \Rightarrow \sqrt{2}v_{\text{پدر}} + 2\sqrt{2} = 2v_{\text{پدر}}$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{2})v_{\text{پدر}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow v_{\text{پدر}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} \times (2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2\sqrt{2} + 2 \text{ m/s}$$

۷۳- گزینه ۲

گرم شدن هوای داخل اتاق به وسیله بخاری و رادیاتور شوفاژ، گرم شدن آب درون قابلمه، جریان‌های باد ساحلی، انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن و ... همگی بر اثر پدیدهٔ همرفت رخ می‌دهند. همهٔ این مثال‌ها نمونه‌هایی از همرفت طبیعی است.

۷۴- گزینه ۱

درس نامه با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسهٔ دو حالت مختلف، رابطهٔ کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

حجم
↑
فشار
←
تعداد مول
↓
دما (K)

حجم گاز (حجم اتاق) و فشار گاز در هر دو حالت یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{P_1 = P_2, V_1 = V_2} n_1 T_1 = n_2 T_2 \xrightarrow{T_1 = 273 + 24 = 297 \text{ K}, T_2 = 273 + 25 = 298 \text{ K}} n_1 \times 297 = n_2 \times 298$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{297}{298}$$

پس $\left(\frac{297}{298}\right) \times 1$ از مولکول‌های هوای اتاق باید خارج شود تا فشار هوای اتاق تغییر نکند.

۷۵- گزینه ۳

ماشین بنزینی چرخه‌ای را طی می‌کند که شامل ۶ فرایند زیر است.

۱- ضربهٔ مکش ۲- ضربهٔ تراکم ۳- آتش‌گرفتن ۴- ضربهٔ قدرت ۵- تخلیه ۶- ضربهٔ خروج گاز
از این شش فرایند، چهار فرایند همراه با حرکت پیستون‌اند که به آن‌ها ضربه می‌گوییم.

گام ۱ حالا می‌توانیم فشار پیمانه‌ای در کف ظرف را به دست بیاوریم.

$$P_g = \rho gh \xrightarrow{\rho = 1200 \text{ kg/m}^3, h = 0.5 \text{ m}} P_g = 1200 \text{ g} \times 0.5 = 600 \text{ g}$$

گام ۲ سؤال، فشار پیمانه‌ای را بر حسب سانتی‌متر جیوه می‌خواهد. باید ببینیم چه ارتفاعی بر حسب سانتی‌متر از مایع جیوه، این فشار پیمانه‌ای را ایجاد می‌کند.

$$P_g = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} \xrightarrow{P_g = 600 \text{ g}, \rho_{\text{جیوه}} = 13600 \text{ kg/m}^3} 600 \text{ g} = 13600 gh_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 0.044 \text{ m} = 4.4 \text{ cm}$$

۷۶- گزینه ۱

درس نامه اگر دو مایع مخلوط‌نشده در یک لولهٔ U شکل قرار داشته باشند و از هر دو طرف با هوای آزاد در ارتباط باشند، طبق اصل هم‌فشاری در نقاط هم‌تراز در یک مایع، رابطهٔ زیر برقرار است.

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 gh_1 = P_0 + \rho_2 gh_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

در این رابطه، مهم این است که یکاهای چگالی‌ها یکسان و یکاهای ارتفاع‌ها نیز یکسان باشند؛ مثلاً ممکن است چگالی‌ها را بر حسب kg/m^3 قرار بدهیم، در حالی که ارتفاع‌ها بر حسب cm باشند.

شکل (الف)، لولهٔ U شکل حاوی جیوه را نشان می‌دهد که در شاخهٔ سمت راست لوله، مایعی با چگالی 2 g/cm^3 می‌ریزیم. وقتی مایع را می‌ریزیم، تعادل جیوه به هم می‌خورد و چون مساحت مقطع هر دو شاخهٔ لوله یکسان است، پس اگر ارتفاع جیوه در شاخهٔ سمت راست به

اندازهٔ x پایین بیاید، به همان اندازهٔ x در شاخهٔ سمت چپ بالا می‌رود (شکل ب). حالا از تساوی فشار در دو نقطهٔ هم‌تراز درون یک مایع (A و B) استفاده می‌کنیم.

$$P_A = P_B \xrightarrow{P = \rho gh + P_0} \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + P_0 = \rho_{\text{مایع}} gh_{\text{مایع}} + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} gh_{\text{مایع}}$$

$$\xrightarrow{\rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3, h_{\text{مایع}} = 17 \text{ cm}} \frac{13.6}{2} \times x = x \times 17 \Rightarrow x = 1/25 \text{ cm}$$

۷۷- گزینه ۴

درس نامه قضیهٔ کار - انرژی جنبشی: کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی آن در ابتدا و انتهای آن جابه‌جایی است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

تندی اولیه (m/s)
↑
تندی نهایی (m/s)
↓
جرم (kg)

کار خاصی قرار نیست بکنیم! قرار است یک سری داده در رابطهٔ زیر جای‌گذاری کنیم و تندی جسم در موقعیت B را به دست بیاوریم.

$$W_t = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

$$\xrightarrow{W_t = 24 \times 10^3 \text{ J}, m = 60 \text{ kg}, v_A = 126 \text{ km/h} = 35 \text{ m/s}} \frac{1}{2} \times 60 \times (v_B^2 - 35^2) = 24 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 800 = v_B^2 - 1225 \Rightarrow v_B^2 = 2025 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} v_B = 45 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_B = 45 \times \frac{3.6}{1} \text{ km/h} = 162 \text{ km/h}$$

تله ۲ زهرداره! سؤال v_B را بر حسب km/h می‌خواهد، نه m/s !

شیمی

۷۶- گزینه ۲

قطره‌های آب موجود در هوا پس از بارش باران، می‌توانند همانند یک منشور سبب تجزیه نور خورشید و ایجاد رنگین‌کمان یا همان طیف پیوسته رنگ‌های نور مرئی (گستره طول موج ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر پرتوهای الکترومغناطیسی) شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) با توجه به مقایسه انرژی نورهای مرئی، تفاوت انرژی نور سرخ و نیلی بیشتر از تفاوت انرژی نور نارنجی و آبی است.

بنفش < نیلی < آبی < سبز < زرد < نارنجی < سرخ
تفاوت کمتر
تفاوت بیشتر

نکته

رنگ شعله فلزها با رنگ شعله ترکیب‌های دارای این فلزها، مشابه است.
شعله ترکیب‌های هر فلز، رنگ منحصر به فردی دارد و از روی تغییر رنگ شعله می‌توان به وجود عنصر فلزی در آن پی برد.

فلز سدیم (Na) و ترکیب‌های آن رنگ شعله زرد
فلز مس (Cu) و ترکیب‌های آن رنگ شعله سبز
فلز لیتیم (Li) و ترکیب‌های آن رنگ شعله سرخ

با توجه به نکته بالا، رنگ شعله لیتیم سولفات و لیتیم نیترات، یکسان و به رنگ سرخ است، اما رنگ شعله مس (II) سولفات (سبز) و سدیم سولفات (زرد) متفاوت است.

بخش اول این عبارت غلطه! می‌دانیم که انرژی لایه‌های الکترونی اطراف هسته هر اتم، به عدد اتمی آن وابسته است؛ بنابراین سطح انرژی لایه الکترونی $n=1$ در اتم‌های ^1_1H و ^4_2He یکسان نیست، ولی دقت کنید که بخش دوم این عبارت درست! برای اتم‌های هیدروژن (^1_1H) و هلیوم (^4_2He) که الکترون‌های آن‌ها در لایه اول قرار می‌گیرد، این لایه ($n=1$) حالت پایه محسوب می‌شود و الکترون‌ها در حالت برانگیخته این دو اتم، در نهایت به این لایه بازمی‌گردند.

۷۷- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در مورد عنصرهای سازنده سیاره‌های زمین و مشتری، به جدول زیر توجه کنید:

ویژگی	نام سیاره	زمین	مشتری
فراوان‌ترین عنصر	آهن (Fe)	هیدروژن (H)	
درصد فراوانی فراوان‌ترین عنصر	کم‌تر از ۵۰ درصد (حدود ۴۰٪)	بیشتر از ۵۰ درصد (حدود ۹۰٪)	
عنصری با کم‌ترین فراوانی در بین ۸ عنصر	آلومینیم (Al)	نئون (Ne)	
در بین ۸ عنصر فراوان، چه نوع عنصرهایی در آن وجود دارد؟	فلز، نافلز و شبه‌فلز	فقط نافلز	
بیشتر از چه جنسی است؟	سنگ	گاز	

ویژگی	نام سیاره	زمین	مشتری
اندازه (شعاع)	زمین > مشتری		
فاصله از خورشید	زمین > مشتری		
عنصرهای مشترک	اکسیژن (O) و گوگرد (S)		
درصد فراوانی عنصرهای مشترک	مشتری > زمین		

۲ در سیاره مشتری برخلاف زمین، عنصر فلزی وجود ندارد.

۸: عنصر اصلی سازنده زمین
فلز فلز فلز فلز فلز فلز فلز
فلز فلز فلز فلز فلز فلز فلز

۸: عنصر اصلی سازنده مشتری
همگی نافلز هستند.

عنصر گوگرد (S)، جزء عنصرهای مشترک سیاره‌های زمین و مشتری است که در هر دو سیاره، رتبه ششم را میان عنصرهای سازنده دارد، اما *فواستون* باشد که درصد فراوانی این عنصر در سیاره زمین بیشتر از مشتری است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) در بین ۸ عنصر اصلی سازنده زمین و مشتری، دو عنصر اکسیژن (O) و گوگرد (S) مشترک هستند.

سومین عنصر فراوان سازنده سیاره‌های زمین و مشتری به ترتیب سیلیسیم (Si) و کربن (C) هستند. Si، شبه‌فلز و C، نافلز است.

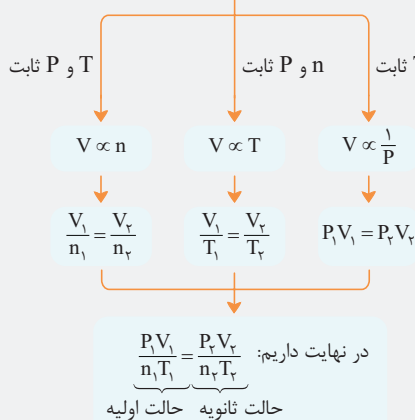
۴) فراوان‌ترین عنصر در سیاره زمین، آهن (Fe) است و درصد فراوانی آن در زمین کم‌تر از ۵۰ درصد (حدود ۴۰ درصد) می‌باشد و فراوان‌ترین عنصر در سیاره مشتری، هیدروژن (H) است و درصد فراوانی آن در مشتری حدود ۹۰ درصد می‌باشد.

مشاوره این سؤال، اولین سؤال مربوط به سیاره‌های زمین و مشتری در کنکورهای سراسری است و قبلاً از این مطالب حفظی، سؤال مستقلی در کنکور نیامده بود؛ پس حواستون باشد که از هیچ بخش کتاب درسی، حتی بخش‌های مقدمه ابتدای هر فصل، غافل نشید!

۷۸- گزینه ۴

درس‌نامه

قوانین مهم گازها



شفاف‌سازی در دما و فشار معین و ثابت، حجم گازها با تعداد مول آن‌ها رابطه مستقیم دارد ($V \propto n$) از آن‌جا که حجم بالون قبل و بعد از کم و اضافه کردن گازهای درون آن، ثابت مانده ($V_1 = V_2$)، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع تعداد مول گازها قبل و بعد از این تغییرات یکسان بوده ($n_1 = n_2$) و بنابراین تعداد مول گاز CO خارج‌شده از بالون برابر با تعداد مول گاز Ar اضافه‌شده به بالون است.

استراتژی ابتدا با توجه به جرم نهایی گازها در بالون و درصد جرمی گازهای موجود در آن، جرم گاز CO باقی‌مانده در بالون و بعد جرم و مول Ar اضافه‌شده به بالون رو حساب کن. از اون‌جا که تعداد مول Ar اضافه‌شده به بالون برابر با تعداد مول CO خارج‌شده از اونه، می‌تونی جرم CO خارج‌شده از بالون رو هم حساب کنی. در نهایت با جمع کردن جرم CO باقی‌مانده و خارج‌شده از بالون، جرم اولیه CO رو به دست میاری.

گام ۱ ۳۰ درصد از جرم بالون نهایی را گاز Ar و در نتیجه ۷۰ درصد مابقی آن را گاز CO تشکیل می‌دهد؛ در نتیجه جرم گاز CO باقی‌مانده در بالون برابر است با:

$$\text{جرم CO باقی‌مانده در بالون} = 434 \text{ g} = \frac{70 \text{ g CO}}{100 \text{ g گاز}} \times 620 \text{ g گاز}$$

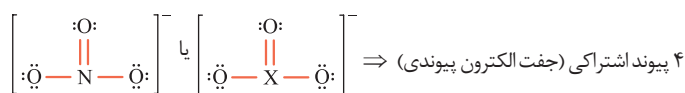
گام ۲ شمار مول‌های گاز Ar اضافه‌شده به بالون را محاسبه می‌کنیم:

$$620 \text{ g گاز} \times \frac{30 \text{ g Ar}}{100 \text{ g گاز}} \times \frac{1 \text{ mol Ar}}{40 \text{ g Ar}} = 4.65 \text{ mol Ar}$$

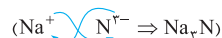
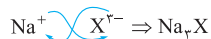
گام ۳ از آن‌جا که شمار مول‌های گاز Ar اضافه‌شده به بالون، برابر با شمار مول‌های گاز CO خارج‌شده از آن است؛ بنابراین جرم گاز CO خارج‌شده از بالون برابر است با:

$$4.65 \text{ mol CO} \times \frac{28 \text{ g CO}}{1 \text{ mol CO}} = 130.2 \text{ g CO}$$

گام ۴ حالا معروف ترین عنصر گروه ۱۵ جدول دوره ای، کدومه؟ آفرین! نیتروژن (N). اگر XO_3^- رو NO_3^- در نظر بگیریم، خیلی سریع تر ساختارش تو ذهنتون میاد!



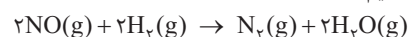
گام ۵ فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از واکنش فلز سدیم با X (عنصر گروه ۱۵ مانند N) به صورت Na_3X است.



تیزبازی اگر ساختار لوویس مولکول ها را به خوبی تمرین کرده باشید، خیلی تند و سریع! متوجه می شید که $XOCl$ ، می تواند همان $NOCl$ ($\ddot{\text{O}}=\ddot{\text{N}}-\ddot{\text{Cl}}\text{:}$) و عنصر X، همان عنصر نیتروژن باشد؛ در نتیجه به سادگی می تونید شمار پیوندهای اشتراکی را در ساختار یون نترات (NO_3^-) و هم چنین فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از عناصرهای سدیم و نیتروژن را تعیین کنید.

۸۱- گزینه ۴

ابتدا باید معادله واکنش انجام شده را موازنه کنیم:



با توجه به معادله موازنه شده واکنش، می توان گفت که اگر در مجموع ۴ مول از گازهای NO و H_2 ، معادل $4 \times 22/4$ لیتر از آن ها متناسب با ضرایب استوکیومتری خود در واکنش شرکت کنند، یک مول گاز N_2 و ۲ مول بخار آب تولید می شود؛ بنابراین داریم:

بازده درصدی واکنش = درصد مصرفی واکنش دهنده ها

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم} \times \frac{X}{100}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

واکنش دهنده های مصرفی فراورده های تولیدی
($N_2 + 2H_2O$)

نکته در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای جرم یک ماده، مجموع یا تفاوت جرم دو ماده خواسته شده یا داده می شود، کسر تناسب مربوط به جرم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مجموع جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی ماده ۱} \times \text{ضریب ماده ۱}) + (\text{جرم مولی ماده ۲} \times \text{ضریب ماده ۲})}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تفاوت جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی ماده ۱} \times \text{ضریب ماده ۱}) - (\text{جرم مولی ماده ۲} \times \text{ضریب ماده ۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{13/44 \times \frac{X}{100}}{4 \times 22/4} = \frac{3/14}{(1 \times 28) + (2 \times 18)} \Rightarrow X = \frac{3/14 \times 4 \times 100}{0/6 \times 64} \Rightarrow X = 40\%$$

N_2 H_2O

مشاوره در این مدل مسائل استوکیومتری پیچیده که تفاوت یا مجموع مقدار مواد، به همراه درصد خلوص یا بازده درصدی واکنش به ما داده می شود، پیچیدگی سؤال به قدری زیاد است که حل آن به روش استفاده از کسرهای تبدیل، طولانی بوده و با خطای علمی زیادی همراه است، لذا شما باید حتماً این سری سؤال ها رو به روش کسر تناسب حل کنید. پس اگر روش کسر تناسب رو تا الان بلد نبودید، یادش بگیرید!

۸۲- گزینه ۳

شفاف سازی در صورت سؤال، باید اشاره می شد که چگالی داده شده مربوط به محلول اولیه است. اگر چگالی داده شده را چگالی محلول نهایی (محلول رقیق شده) در نظر بگیریم، به اعداد داده شده در گزینه ها نمی رسیم.

استراتژی ابتدا با توجه به حجم و غلظت مولی محلول اولیه (غلظت)، شمار مول ها و در نتیجه جرم حل شونده ($NaOH$) موجود در آن را محاسبه کن، سپس با توجه به این که با افزودن آب، مقدار حل شونده در محلول ثابت باقی می ماند و با توجه به درصد جرمی محلول نهایی (رقیق)، جرم محلول نهایی را به دست بیار. در نهایت تو سه سوت! با کم کردن جرم محلول اولیه از جرم محلول نهایی، جرم آب اضافه شده به محلول را حساب کن.

گام ۱ مقدار اولیه گاز CO را به دست می آوریم:

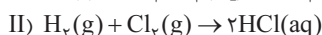
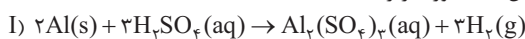
جرم CO خارج شده از بالون + جرم CO باقی مانده در بالون = مقدار اولیه گاز CO

$$= 434 + 130/2 = 564/2 \text{ g}$$

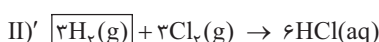
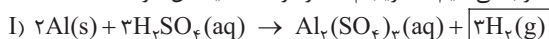
مشاوره بعد از سال ها انتظار، سؤالات مربوط به قوانین گازها، امسال در کنکور سراسری مطرح شده و مهر تأییدی رو بر این موضوع زده که انتظار طرح سؤال از هر قسمت و موضوعی از کتاب درسی رو باید داشته باشیم. البته فدا رو شکر همه این مباحث رو بپه های خیلی سبزی تو کتاب تستاشون فوندن و بلدن و تو کنکور غافل گیری پراشون معنی نداره!

۷۹- گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش ها به صورت زیر است:



روش استفاده از کسر تناسب: چون می خواهیم کل هیدروژن تولید شده در واکنش (I)، در واکنش (II) مصرف شود، می توانیم ضریب H_2 در دو واکنش را یکسان کنیم و سپس به طور مستقیم بین Al در واکنش (I) و Cl_2 در واکنش (II) تناسب برقرار کنیم. برای این منظور معادله (II) را در ۳ ضرب می کنیم تا ضریب H_2 در دو معادله یکسان شود:



حال بین Al و Cl_2 به طور مستقیم تناسب برقرار می کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم} \times 22/4} \Rightarrow \frac{X}{2 \times 27} = \frac{1/96}{3 \times 22/4}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1/96 \times 2 \times 27}{3 \times 22/4} = 7/2 \text{ g Al}$$

روش استفاده از کسر تبدیل: به کمک واکنش (II)، از حجم Cl_2 به مول H_2 می رسیم و سپس به کمک واکنش (I) از مول H_2 ، جرم Al را به دست می آوریم:

$$\frac{1/96 \text{ L } Cl_2}{22/4 \text{ L } Cl_2} \times \frac{1 \text{ mol } Cl_2}{22/4 \text{ L } Cl_2} \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } Cl_2} \times \frac{2 \text{ mol } Al}{3 \text{ mol } H_2} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = 7/2 \text{ g Al}$$

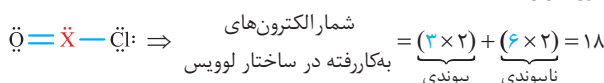
واکنش (I) واکنش (II)

۸۰- گزینه ۲

درس نامه بعضی وقت ها ساختار لوویس یک مولکول را به ما می دهند که یکی از اتم های آن مجهول است و از ما می فاون که شماره گروه آن اتم را پیدا کنیم. در این گونه سؤال ها، کافی است که مجموع شمار الکترون های به کاررفته در ساختار لوویس مولکول را برابر با مجموع شمار الکترون های ظرفیت اتم های سازنده آن ها قرار دهیم:

$$\text{مجموع شمار الکترون های} = \text{مجموع شمار الکترون های} \Rightarrow \text{ظرفیت اتم های سازنده} = \text{به کاررفته در ساختار لوویس}$$

گام ۱ در مولکول $XOCl$ ، X اتم مرکزی است و Cl (هالوژن ها) با یک پیوند اشتراکی به اتم مرکزی متصل است؛ بنابراین با توجه به توضیحات داده شده، ساختار لوویس مولکول $XOCl$ به صورت زیر است:



گام ۲ هر اتم O دارای ۶ الکترون ظرفیتی و هر اتم Cl دارای ۷ الکترون ظرفیتی است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مجموع شمار الکترون های} = \text{مجموع شمار الکترون های} \Rightarrow 18 = 6 + 7 + X \Rightarrow X = 5$$

ظرفیتی اتم ها به کاررفته در ساختار لوویس

X ، ۵ الکترون ظرفیتی دارد و متعلق به گروه ۱۵ است. $\Rightarrow$

۸۴ - گزینه ۱

شفاف سازی منظور از غلظت مولکول‌ها در محلول I، غلظت اسید یونیده نشده $(M - [H^+])$ و منظور از مجموع غلظت یون‌ها در محلول (II)، مجموع غلظت یون‌های H^+ و $HCOO^-$ است که با هم برابر بوده و هر کدام از رابطه $M\alpha$ به دست می‌آید.

نکته فرایند یونش اسیدهای ضعیف در آب، تعادلی است و برای آن‌ها، رابطه‌های زیر برقرار است:

	HA	$\rightleftharpoons$	H^+	+	A^-
غلظت اولیه	M		۰		۰
تغییر غلظت	-x		+x		+x
غلظت تعادلی	M-x		x		x

$$x = [H^+] = [A^-] = M\alpha$$

$$\text{غلظت تعادلی یا یونیده نشده اسید} = M - x = M - [H^+] = M - M\alpha$$

گام ۱ با توجه به غلظت اولیه اسید HF، برای به دست آوردن غلظت مولکول‌ها در محلول (I) (که منظور همان مولکول‌های یونیده نشده HF است) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

بنابراین با توجه به رابطه $[H^+] = M\alpha$ داریم:

$$[H^+] = 0.2 \times 0.4 \times 10^{-2} = 4.8 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

(خواستون باشه که در جدول مربوط به سؤال درصد یونش آمده و نه درجه یونش.)

$$[HF]_{\text{تعادلی}} = 0.2 - 4.8 \times 10^{-4} = 1.952 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۲ محاسبه مجموع غلظت یون‌ها در محلول HCOOH

$$[H^+] + [HCOO^-] = 2M\alpha$$

$$= 2 \times 0.2 \times 0.4 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۳ محاسبه نسبت خواسته شده:

$$\frac{\text{غلظت مولکول‌ها در محلول (I)}}{\text{مجموع غلظت یون‌ها در محلول (II)}} = \frac{1.952 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 48/8$$

تیزبازی با توجه به α بسیار کم محلول I، می‌توانیم غلظت مولکول‌های تعادلی و اولیه آن را یکسان در نظر بگیریم و با تقریب خوبی به پاسخ برسیم؛ بنابراین داریم:

$$\frac{[HF]_{\text{تعادلی}}}{\text{مجموع غلظت یون‌ها در محلول (II)}} = \frac{0.2}{4 \times 10^{-4}} = 50$$

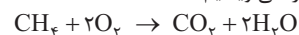
نزدیک‌ترین گزینه به این عدد، ① (48/8) است.

۸۵ - گزینه ۴

شفاف سازی نخستین آلکان $\leftarrow$ متان (CH_4) دومین آلکان $\leftarrow$ اتان (C_2H_6)

استراتژی تعداد مول CH_4 و C_2H_6 اولیه را x و y در نظر بگیر و معادله واکنش سوختن آن‌ها را بنویس! بعد با توجه به نسبت مقدار اکسیژن مصرفی در آن‌ها، رابطه بین x و y را پیدا کن و در آخر، با توجه به رابطه (جرم مولی $\times$ مول = جرم)، نسبت تعداد مول آلکان‌ها را به نسبت جرم آن‌ها تبدیل کن!

گام ۱ تعداد مول نخستین آلکان (CH_4) و دومین آلکان (C_2H_6) را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم و با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد در معادله موازنه شده سوختن کامل آن‌ها، رابطه بین تعداد مول آلکان و اکسیژن مصرفی را می‌نویسیم:



$$x \text{ mol} \quad 2x \text{ mol}$$



$$y \text{ mol} \quad \frac{7}{2}y \text{ mol}$$

گام ۲ (روش) با توجه به رابطه «جرم مولی $\times$ مول = جرم» و اطلاعات داده شده در سؤال، جرم و در نتیجه تعداد مول اکسیژن مصرفی در سوختن کامل متان $(2x)$ ، ۳ برابر جرم و تعداد مول اکسیژن مصرفی در سوختن کامل اتان $(\frac{7}{2}y)$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$2x = 3 \times \frac{7}{2}y \Rightarrow 4x = 21y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{21}{4}$$

گام ۳ جرم NaOH موجود در محلول اولیه (غلظت) را محاسبه می‌کنیم:

$$1 \text{ mol} = 2 \times 0.5 = \text{حجم} \times \text{غلظت مولی} = \text{مول NaOH} \Rightarrow \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \text{غلظت مولی}$$

بنابراین در محلول اولیه، یک مول NaOH معادل ۴۰ گرم از این ماده وجود دارد.

گام ۴ با افزودن آب به محلول و رقیق کردن آن، جرم NaOH موجود در آن ثابت می‌ماند؛ بنابراین می‌توانیم جرم محلول نهایی را محاسبه کنیم:

$$\text{محلول} = 800 \text{ g} = \frac{40}{x} \times 100 \Rightarrow x = \frac{40 \times 100}{800} = 5$$

گام ۵ با محاسبه جرم محلول اولیه و کم کردن آن از جرم محلول نهایی، جرم آب اضافه شده را به دست می‌آوریم:

$$600 \text{ g} = \frac{g}{\text{mL}} \times 500 \text{ mL} \Rightarrow \frac{g}{\text{mL}} = \frac{600}{500} = 1.2 \Rightarrow \text{جرم محلول اولیه} = 1.2 \times 500 = 600 \text{ g}$$

$$\Rightarrow \text{جرم محلول اولیه} - \text{جرم محلول نهایی} = 800 - 600 = 200 \text{ g}$$

مشاوره اگر چگالی داده شده را مربوط به محلول نهایی (محلول رقیق) می‌دانستیم، باید ابتدا غلظت مولی محلول رقیق را محاسبه می‌کردیم:

$$M = \frac{10 \times 5 \times 10^{-2}}{40} = \frac{10 \times 5 \times 10^{-2}}{40} = 1/5 \text{ mol.L}^{-1}$$

حالا اگر از فرمول رقیق سازی استفاده کنیم، حجم محلول رقیق برابر است با:

$$V_{\text{رقیق}} = 667 \text{ mL} \Rightarrow 2 \times 500 = 1/5 \times V_{\text{رقیق}} \Rightarrow V_{\text{رقیق}} = 667 \text{ mL}$$

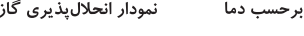
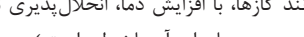
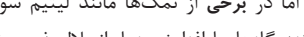
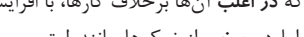
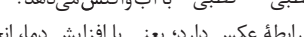
$$167 \text{ mL} = 667 - 500 = \text{حجم محلول غلیظ} - \text{حجم محلول رقیق} = \text{حجم آب اضافه شده}$$

چگالی آب 1 g.mL^{-1} است؛ بنابراین جرم آب اضافه شده ۱۶۷ گرم می‌شود که در گزینه‌ها وجود ندارد!

۸۳ - گزینه ۲

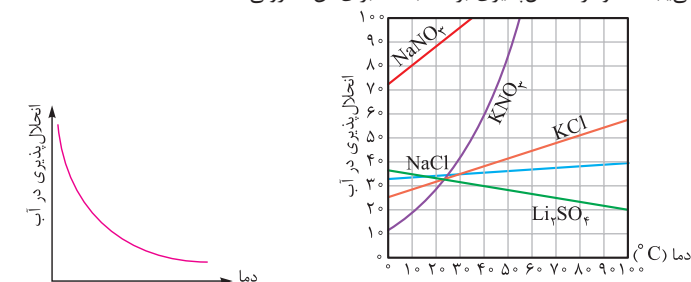
گشتاور دوقطبی اغلب هیدروکربن‌ها مانند متان (CH_4) ناچیز و در حدود صفر است. از آن‌جا که در ساختار کربن دی‌سولفید (CS_2) ، اتم‌های اطراف اتم مرکزی یکسان و اتم مرکزی فاقد الکترون ناپیوندی است؛ این ماده نیز ناطبی بوده و گشتاور دوقطبی آن برابر صفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ① در شرایط یکسان، انحلال پذیری گاز ناطبی CO_2 از انحلال پذیری گاز قطبی NO بیشتر است نه کمتر! زیرا CO_2 برخلاف NO با آب واکنش می‌دهد.



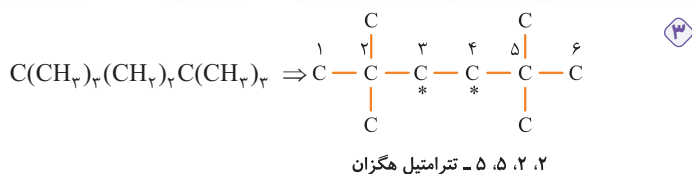
④ انحلال پذیری گازها با دما رابطه عکس دارد؛ یعنی با افزایش دما، انحلال پذیری گازها در آب، کاهش می‌یابد.

در مورد نمک‌ها می‌توان گفت که در اغلب آن‌ها برخلاف گازها، با افزایش دما، انحلال پذیری نمک در آب، افزایش می‌یابد. اما در برخی از نمک‌ها مانند لیتیم سولفات (Li_2SO_4) و کلسیم کلرید $(CaCl_2)$ همانند گازها، با افزایش دما، انحلال پذیری نمک در آب، کاهش می‌یابد. (نمودار انحلال پذیری بر حسب دما برای آن‌ها نزولی است.)

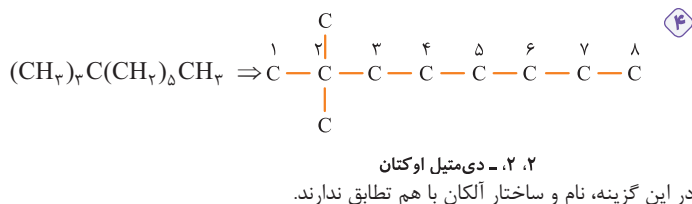


نمودار انحلال پذیری برخی ترکیب‌های یونی در آب بر حسب دما

④ طبق متن کتاب درسی، انتقال پیام‌های عصبی بدون وجود یون پتاسیم (K^+) اصلاً امکان پذیر نیست.



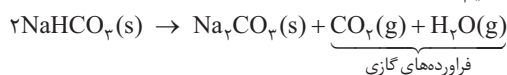
در این گزینه، نام و ساختار آلکان با هم تطابق دارند و آلکان دارای ۲ گروه CH_3 است.



در این گزینه، نام و ساختار آلکان با هم تطابق ندارند.

۸۷- گزینه ۲

روش استفاده از کسر تناسب: در استفاده از این روش، بازده درصدی را باید در صورت کسر واکنش دهنده ضرب کنیم:



$$\frac{\frac{\text{بازده درصدی}}{100} \times \text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{(\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} \text{ B}) - (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} \text{ A})}$$

$$\frac{x \times \frac{32}{100}}{\frac{1}{1}} = \frac{100}{44-18} \Rightarrow \frac{x \times 32}{100} = \frac{100}{26} \Rightarrow x = \frac{100}{32} = \frac{10}{\lambda} = \frac{\Delta}{f} = 1/25$$

روش ۲: استفاده از کسر تبدیل: با توجه به معادله واکنش، اگر ۲ مول واکنش‌دهنده با بارزد ۱۰۰ درصد مصرف شود، ۱ مول گاز CO_2 (با جرم ۴۴) و ۱ مول گاز H_2O (با جرم ۱۸ g) تولید می‌شود؛ یعنی تفاوت جرم فراورده‌های گازی برابر $44 - 18 = 26$ گرم خواهد بود.

$$2\text{NaHCO}_3(\text{s}) \rightarrow \text{Na}_2\text{CO}_3(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{g})$$

حالا اگر تعداد مول واکنش دهنده را X مول در نظر گرفته و بازده درصدی واکنش را در محاسبات وارد کنیم، خواهیم داشت:

$$x \text{ mol NaHCO}_3 \times \frac{26 \text{ g تفاوت جرم}}{2 \text{ mol NaHCO}_3} \times \frac{64}{100} = 10/4 \text{ g تفاوت جرم}$$

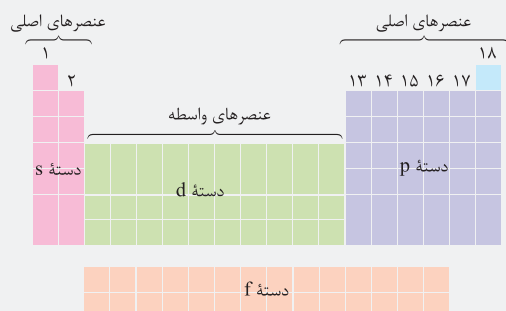
$$\Rightarrow x = 1/25 \text{ mol NaHCO}_3$$

⌚ - ۸۸ - گزینه ۴

شفاف‌سازی ۱ اتم Y از دسته d ← گروه ۳ تا ۱۲ ← ۳ تا ۱۲ الکترون ظرفیتی
۲ اتم X از دسته s ← گروه ۱ و ۲ و هیدروژن و هلیم ← ۱ یا ۲ الکترون ظرفیتی

درس‌نامه دسته‌بندی عنصرها به s, p, d و f

با توجه به این که آخرین الکترون هر اتم به چه زیرلایه‌ای وارد می‌شود، می‌توان عنصرها را به چهار دسته d , p , f و s تقسیم کرد. در ضمن، عنصرهای دسته s و p را عنصرهای اصلی و عنصرهای دسته d را عنصرهای واسطه می‌نامند.



۷۴ با توجه به رابطه « جرم مولی $\times$ مول = جرم »، نسبت تعداد مول آلکانها را به نسبت جرم آنها تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم } \text{CH}_4}{\text{جرم } \text{C}_2\text{H}_6} = \frac{(x) \text{ مول } \text{CH}_4}{(y) \text{ مول } \text{C}_2\text{H}_6} \times \frac{\text{جرم مولی } \text{CH}_4}{\text{جرم مولی } \text{C}_2\text{H}_6} = \frac{21}{4} \times \frac{16}{30} = 2/1$$

روش معادله واکنش سوختن متان را در عدد $10/5$ ضرب می‌کنیم تا ضریب O_2 در واکنش سوختن متان، ۳ برابر ضریب O_2 در واکنش سوختن اتان شود، سپس بین متان و اتان تناسب برقرار می‌کنیم:

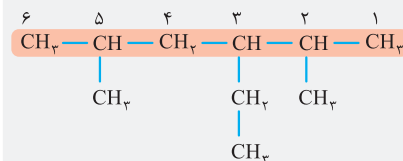
$$10/5 CH_4 \sim 21 O_2$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{CH}_4}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{C}_2\text{H}_6}} \Rightarrow \frac{\text{جرم CH}_4}{10/5 \times 16} = \frac{\text{جرم C}_2\text{H}_6}{2 \times 30}$$

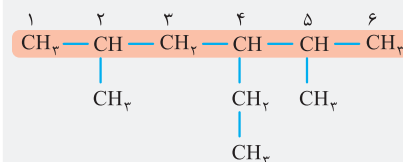
$$\Rightarrow \frac{\text{جرم } \text{CH}_4}{\text{جرم } \text{C}_2\text{H}_6} = \frac{10/5 \times 16}{2 \times 30} = \frac{16}{30} = 2/3$$

۸۶- گزینه ۳

نکته در نام‌گذاری آلکان‌ها، شماره‌گذاری زنجیر اصلی را از سمتی انجام می‌دهیم که از کنار هم گذاشتن عددهای مربوط به کربن‌های دارای شاخهٔ فرعی، عدد کوچک‌تری به دست بیاید.



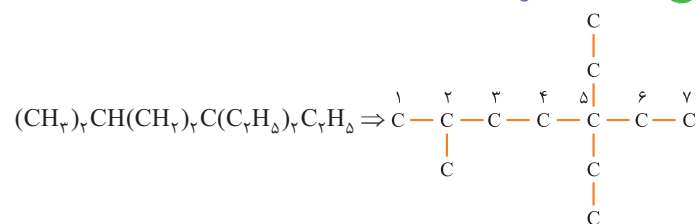
شماره‌گذاری درست (عدد حاصل از شماره کربن‌های دارای شاخه فرعی: ۲۳۵)



شماره‌گذاری نادرست (عدد حاصل از شماره کربن‌های دارای شاخه فرعی: ۲۴۵)

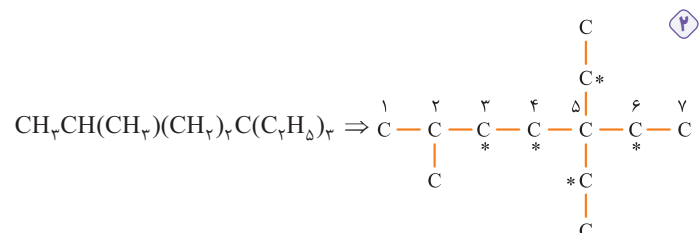
فقط نام‌های داده شده در ۲ و ۳ با ساختار مطابقت دارند. آلکان ۲، ۵ گروه CH_3 و آلکان ۳، ۲ گروه CH_3 دارد.

بررسی گزینه‌ها: ۱



۵، ۵- دی اتیل - ۲- متیل هیتان

در این گزینه، نام و ساختار آلکان با هم تطابق ندارند.



۵، ۵- دی اتیل - ۲- متیل هیتان

در این گزینه، نام و ساختار آلکان با هم تطابق دارند و آلکان، دارای ۵ گروه CH_2 است.
(در ساختار با * مشخص شده است.)

۸۹- گزینه ۱

★ **نکته** برای واکنش‌های گازی، ΔH واکنش را می‌توان با استفاده از آنتالپی‌های پیوند، مطابق رابطه زیر تعیین کرد:

$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} \right]$$

رابطه محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند را نوشته و موارد معلوم را در آن جای گذاری می‌کنیم:

$$\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \rightarrow 2\text{NH}_3 \quad \Delta H = -92 \text{ kJ}$$

$$-92 = [\Delta H(\text{N}_2) + 3\Delta H(\text{H}_2)] - [6\Delta H(\text{N}-\text{H})]$$

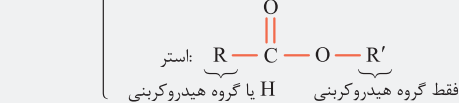
$$\Rightarrow \Delta H(\text{N}_2) + 3\Delta H(\text{H}_2) = 2248 \text{ kJ}$$

اگر رابطه به دست آمده را در $2/3$ ضرب کنیم، انرژی لازم برای شکستن پیوند در $2/3$ مول N_2 و $6/3$ مول H_2 به دست می‌آید:

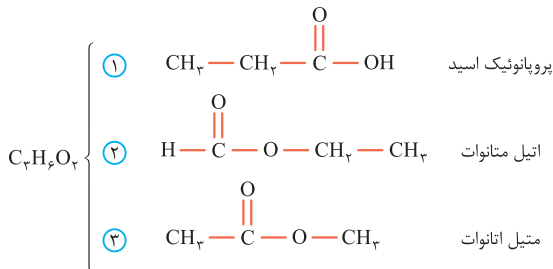
$$2/3 \times \Delta H(\text{N}_2) + 6/3 \times \Delta H(\text{H}_2) = 2/3 \times 2248 = 4496/3 \text{ kJ}$$

۹۰- گزینه ۱

★ **نکته** در حد کتاب درسی، ترکیبی با دو اتم اکسیژن و فرمول کلی $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ می‌تواند از خانواده کربوکسیلیک اسیدها یا استرها باشد:



برای ترکیبی با فرمول $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$ می‌توان یک ساختار اسیدی و دو ساختار استری در نظر گرفت:



🔍 **بررسی گزینه‌ها:** ۱ ترکیبی با فرمول $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$ ، دو نوع استر یا یک نوع اسید است.

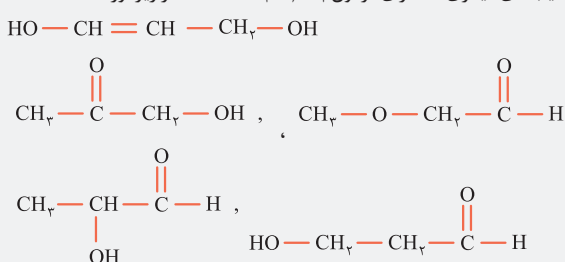
۲ به طور کلی، ایزومرها سطح انرژی متفاوتی دارند، زیرا پیوندهای متفاوتی نیز در ساختار آنها وجود دارد.

۳ با توجه به یکسان بودن فرمول مولکولی ایزومرها، شمار جفت الکترون‌های پیوندی (پیوند اشتراکی) در آنها یکسان است:

$$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2 \text{ در شمار پیوندها} = \frac{\text{C}}{4} \times 3 + \frac{\text{H}}{1} \times 6 + \frac{\text{O}}{2} \times 2 = 11$$

۴ جاذبه بین مولکولی غالب در کربوکسیلیک اسیدهای کوچک، به دلیل وجود پیوند $\text{O}-\text{H}$ در ساختار آنها، از نوع پیوند هیدروژنی است، در حالی که جاذبه بین مولکولی غالب در استرها، از نوع وان‌دروالسی است.

🗨 **مشاوره** برای فرمول $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$ می‌توان ساختارهای دیگری نیز در نظر گرفت که با توجه به این که در کتاب درسی مطرح نشده‌اند، طراح سؤال، آنها را در نظر نگرفته است. بهتر بود حداقل در صورت سؤال، اشاره می‌شد که ترکیب مورد نظر، فقط دارای یک گروه عاملی اکسیژن‌دار است. ساختار برخی از ترکیب‌های دیگری که دارای فرمول $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$ هستند، در زیر آورده شده است:



عنصرهای دسته s ← عنصرهای گروه‌های ۱ و ۲ + ← ۱۴ عنصر هیدروژن و هلیوم

عنصرهای دسته p ← عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به جز هلیوم) ← ۳۶ عنصر

عنصرهای دسته d ← عنصرهای گروه‌های ۳ تا ۱۰ در دوره‌های چهارم تا هفتم ← ۴۰ عنصر

عنصرهای دسته f ← عنصرهای دو ردیف پایین جدول ← ۲۸ عنصر

با توجه به آرایش الکترونی هر عنصر، می‌توان شمار الکترون‌های ظرفیت و موقعیت آن را در جدول تعیین کرد:

نوع دسته	آرایش الکترون‌های ظرفیت	تعداد الکترون‌های ظرفیت	رابطه شماره گروه و تعداد الکترون‌های ظرفیت
s	ns	توان ns (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	تعداد e‌های ظرفیت = شماره گروه (به جز هلیوم)
d	(n-1)d ns	مجموع توان ns و (n-1)d (تعداد الکترون‌های دو زیرلایه آخر)	تعداد e‌های ظرفیت = شماره گروه
p	ns np	مجموع توان ns و np (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	تعداد e‌های ظرفیت = شماره گروه

دقت کنید که برای همه عنصرهای دسته s (به جز هلیوم) و عنصرهای دسته d، شمار الکترون‌های ظرفیت با شماره گروه برابر است:

شماره گروه = شمار الکترون‌های ظرفیت $\Rightarrow$ عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲

عنصر Y در دسته d یعنی گروه‌های ۳ تا ۱۲ قرار دارد؛ بنابراین دارای ۱۲ الکترون ظرفیتی است. از طرفی عنصر X در دسته s قرار دارد؛ یعنی با ۱ و ۲ قرار دارد و با هلیوم است و دارای ۱ یا ۲ الکترون ظرفیتی می‌باشد.

حالا باید ببینیم در چه حالتی، تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم Y، دو برابر اتم X خواهد شد. اگر X در گروه ۱ قرار داشته باشد (ns^1)، دارای یک الکترون ظرفیتی است؛ پس طبق اطلاعات سؤال، اتم Y باید دو الکترون ظرفیتی داشته باشد که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، زیرا در دسته d، عنصری با ۲ الکترون ظرفیتی وجود دارد؛ بنابراین X باید ۲ الکترون ظرفیتی داشته باشد (در گروه ۲ یا هلیوم باشد) تا Y دارای ۴ الکترون ظرفیتی شود. با توجه به این که Y در دوره چهارم قرار دارد، این اتم همان فلز تیتانیوم ($_{22}\text{Ti}$) از گروه ۴ است.

$$\text{غلق } 2e^- \text{ ظرفیتی } Y \Rightarrow \begin{cases} ns^1 \xrightarrow{\text{برابر ۲}} Y \\ ns^2 \xrightarrow{\text{برابر ۲}} Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow \text{He, ۲ گروه} \\ Y \Rightarrow \text{Ti, ۲۲ گروه} \end{cases}$$

🔍 **بررسی گزینه‌ها:** ۱ اگر X هلیوم باشد، با گاز کلر واکنش نمی‌دهد و الکترون مبادله نمی‌شود.

۲ می‌تواند هلیوم باشد که گاز است.

۳ بالاترین عدد اکسایش عنصرهای گروه ۲ و تیتانیوم در ترکیب‌ها به ترتیب +۲ و +۴ است، اما دقت کنید که X می‌تواند هلیوم هم باشد که در واکنشی شرکت نمی‌کند و ترکیبی ندارد و عدد اکسایش آن همیشه صفر است.

۴ عنصر گروه ۲ در دوره چهارم، همان کلسیم ($_{20}\text{Ca}$) است. در این حالت، تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر $20 - 22 = 2$ خواهد بود؛ یعنی در اینجا واژه «حداقل» هم اضافی است، ولی با توجه به این که ۱ تا ۳ با هلیوم نقض می‌شوند، **اهتملاً طراح می‌فراسته**

رو درست بگیره!

۹۷- گزینه ۲

گام ۱: با توجه به حجم و pH محلول نهایی، مول کلی یون هیدروکسید در محلول را به دست می آوریم:

$$pH = 13/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-13/7} = 10^{-14} \times 10^{0/7} = 2 \times 10^{-14}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-14}} = 0/5$$

$$OH^- \text{ مول} = OH^- \times \text{حجم محلول} \times \text{غلظت مولی} = 0/5 \text{ mol.L}^{-1} \times 0/5 \text{ L} = 0/25 \text{ mol}$$

گام ۲: با توجه به جرم K_2O ، به مول OH^- تولیدی از واکنش تفکیک یونی $K_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2KOH(aq)$ می رسیم:

روش ۱: استفاده از کسر تبدیل:

$$2/35 \text{ g } K_2O \times \frac{1 \text{ mol } K_2O}{94 \text{ g } K_2O} \times \frac{2 \text{ mol } KOH}{1 \text{ mol } K_2O} \times \frac{1 \text{ mol } OH^-}{1 \text{ mol } KOH} = \frac{4/7}{94} = \frac{1}{20} \text{ mol} = 0/05 \text{ mol } OH^-$$

روش ۲: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{2/35}{1 \times 94} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0/05 \text{ mol}$$

گام ۳: از آن جایی که مجموع مول یون OH^- در دو واکنش برابر $0/25$ بوده است، پس مول هیدروکسید واکنش تفکیک $NaOH$ برابر $0/2 - 0/05 = 0/15$ است:

روش ۱: استفاده از کسر تبدیل:

$$15/5 \text{ g } Na_2O \times \frac{y \text{ g } Na_2O}{100 \text{ g } Na_2O} \times \frac{1 \text{ mol } Na_2O}{62 \text{ g } Na_2O} \times \frac{2 \text{ mol } NaOH}{1 \text{ mol } Na_2O}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol } OH^-}{1 \text{ mol } NaOH} = 0/2 \Rightarrow \frac{15/5 \times y \times 2}{100 \times 62} = 0/2 \Rightarrow y = 40\%$$

روش ۲: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{15/5 \times y}{100} = \frac{0/2}{2} \Rightarrow y = 40\%$$

۹۸- گزینه ۱

در کلید ارائه شده توسط سازمان سنجش، پاسخ این تست، ۱ در نظر گرفته شده است، اما می توان همه گزینه ها را نادرست در نظر گرفت.

بررسی گزینه ها: ۱ اگر بخوایم خیلی کلی صحبت کنیم، در همه واکنش های اکسایش - کاهش الکترون مبادله می شود و فرض اولیه این عبارت، نادرست! اما اگر مبادله الکترون را به معنای واقعی یعنی از دست دادن و گرفتن الکترون در نظر بگیریم، در سطح کتاب درسی، این عبارت می تواند درست باشد، زیرا به طور معمول، در مبادله کامل الکترون، همیشه پای یک فلز در میان است! مثلاً واکنش $2Na + Cl_2 \rightarrow 2NaCl$ ، با مبادله الکترون بین فلز سدیم و گاز کلر همراه است. دقت کنید که در واکنش هایی مانند $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ ، چون مواد شرکت کننده، مولکولی هستند، مبادله کامل الکترون وجود ندارد و ما با بار جزئی سروکار داریم و به همین دلیل بود که برای توجیه این گونه واکنش ها از عدد اکسایش استفاده می کردیم. فاصله این که طراح در این جا می خواسته به تعریف عدد اکسایش گیر بده و بگه در واکنش هایی که فلز نداریم، مبادله کامل الکترون نداریم! اما مشکل این بااست که اولاً اصطلاح «مبادله الکترون» بارها و بارها در سؤالات کنکور سراسری (از جمله سؤال ۱۰۰ همین دفترچه) برای همه واکنش های اکسایش - کاهش (چه با مبادله کامل الکترون و وجود فلز و چه با مبادله جزئی الکترون و بدون فلز) به کار رفته است. هم چنین واکنش هایی نیز وجود دارند که فلز، الکترون از دست نمی دهد و در واکنش با یک نافلز، ترکیب مولکولی تشکیل می دهد، یعنی با وجود این که به معنای واقعی، الکترون مبادله نمی شود، اما گونه فلزی در واکنش وجود دارد، مانند واکنش فلز بریلیم با برخی نافلزها! شاید بگوییم چنین واکنش هایی در کتاب درسی بررسی نشده اند. حرف شما کاملاً درسته! اما این پوری برای توبیه ۳ به مشکل می فوریم!

۲ برای رد این گزینه می توان به واکنش فلز با یون فلزی اشاره کرد، مثلاً $Fe + Cu^{2+} \rightarrow Fe^{2+} + Cu$ که در این واکنش اصلاً یون نافلزی وجود ندارد. در ضمن، در آن یک یون فلزی (Cu^{2+}) کاهش می یابد و نه یون نافلزی!

۹۴- گزینه ۳

نکته: کاربردهای پلیمرهای مطرح شده در کتاب درسی:

- ۱ پلی اتن، $(C_2H_4)_n$ ← سبک کیسه پلاستیکی شفاف موجود در فروشگاه ها
← سنگین لوله های پلاستیکی، دبه و تانکرهای آب، بطری کدر شیر
 - ۲ پلی پروپن، $(C_3H_6)_n$ ← تهیه تجهیزات پزشکی مانند سرنگ
 - ۳ پلی سیانواتن، $(C_4H_3N)_n$ ← پتو، فرش و پارچه
 - ۴ پلی استیرن، $(C_8H_8)_n$ ← ظروف یکبار مصرف
 - ۵ پلی وینیل کلرید، $(C_2H_3Cl)_n$ ← کیسه خون
 - ۶ پلی تترافلورواتن یا تفلون، $(C_2F_4)_n$ ← نخ دندان، نوار تفلون، کفی اتو، ظروف نجسب
 - ۷ کولار (نوعی پلی آمید) ← تایر اتومبیل، قایق بادبانی، لباس های مخصوص مسابقه موتورسواری، جلیقه ضد گلوله
 - ۸ پلی لاکتیک اسید (نوعی پلیمر سبز) ← ظرف های پلاستیکی یکبار مصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسه پلاستیکی
- ساخت تانکر آب از کاربردهای پلی اتن سنگین و ساخت تایر اتومبیل از کاربردهای کولار (نوعی پلی آمید) است.

۹۵- گزینه ۳

نکته: معادله واکنش خنثی شدن اسید و باز تک ظرفیتی به صورت $HA + BOH \rightarrow BA + H_2O$ است و به ازای مصرف ۱ مول اسید، یک مول باز مصرف می شود.

بررسی گزینه ها:

- ۱ برای خنثی شدن $0/05$ مول HCl ($0/05 \text{ mol} \times 1 \text{ mol.L}^{-1} = 0/05 \text{ mol}$) مطابق واکنش $NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$ ، $0/05$ مول $NaOH$ مصرف می شود.
- ۲ در دمای اتاق در هر محلول آبی، حاصل $[H^+][OH^-]$ ثابت و برابر 10^{-14} است.
- ۳ با توجه به این که برای خنثی شدن $0/05$ مول HCl (H^+)، $0/05$ مول $NaOH$ (OH^-) نیاز است، فارغ از حجم محلول (II)، مول H^+ و OH^- یا شمار آن ها با هم برابر است.
- ۴ اگر حجم محلول ظرف (II) برابر 250 میلی لیتر باشد، داریم:

$$[OH^-] = \frac{OH^- \text{ مول}}{\text{حجم محلول}} = \frac{0/05}{0/25} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+] = [HCl] = 0/1$$

بنابراین نسبت $[OH^-]$ به $[H^+]$ برابر ۲ خواهد بود.

۹۶- گزینه ۱

نکته: فرمول کلی پاک کننده صابونی جامد و غیر صابونی به صورت $RCOONa$ و $R'C_6H_4SO_3Na$ است.

دقت کنید که هر چند فرمول بنزن، به صورت C_6H_6 است، اما در پاک کننده های غیر صابونی، دو طرف حلقه بنزن به اتم های کربن و گوگرد متصل است، به همین دلیل در پاک کننده های غیر صابونی، حلقه بنزی، ۴ اتم هیدروژن دارد:

پس با توجه به اطلاعات سؤال، بخش هیدروکربنی پاک کننده صابونی دارای $35 + 4 = 39$ اتم هیدروژن است و از آن جایی که بخش R آن سیر شده است، فرمول پاک کننده به صورت $C_nH_{2n+1}COONa$ می باشد:

$$2n + 1 = 35 \Rightarrow n = 17 \Rightarrow \text{فرمول پاک کننده: } C_{17}H_{35}COONa$$

جرم مولی این پاک کننده برابر 306 گرم بر مول است.

$$17(12) + 35(1) + 12 + 2(16) + 23 = 306 \text{ g.mol}^{-1}$$

تیزبازی: حواستون باشه، با توجه به این که هیچ اطلاعاتی راجع به کربن های بخش R پاک کننده غیر صابونی نداریم، هر گزینه ای که کربن های این دو پاک کننده رو مقایسه می کنه، نمی تونه به یقین درست باشه و تنها جواب این سؤال ۱ می تونه باشه.

۱۰۰- گزینه ۳

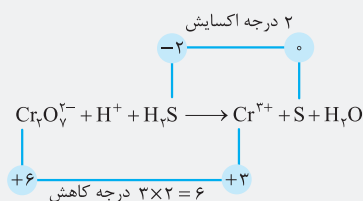
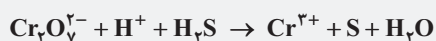
درسنامه موازنه به روش اکسایش - کاهش

اصل کلی در موازنه واکنش‌ها به روش عدد اکسایش این است که پس از محاسبه عدد اکسایش عناصرها، باید مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسندۀ و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسندۀ را ضریب گونه کاهنده قرار دهیم و سپس با توجه به ضرایب معلوم‌شده، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین کنیم و اما *پند نکته میاتی!*

۱ در حالت عادی، ما موازنه را از سمت چپ معادله واکنش شروع می‌کنیم، اما در حالتی که یک عنصر دارای چندین عدد اکسایش در سمت راست معادله واکنش باشد (مانند واکنش $\text{Cu} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$)، موازنه را باید از سمت راست معادله واکنش آغاز کنیم.

۲ اگر عنصری که با آن موازنه را می‌خواهیم آغاز کنیم، دارای زیروند باشد (در همان سمتی از معادله که موازنه آغاز می‌شود)، باید تغییر عدد اکسایش هر اتم آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را بین گونه‌های کاهنده و اکسندۀ انجام بدهیم. ۳ در صورت ساده‌شدن عددهای مربوط به تغییر عدد اکسایش گونه‌های کاهنده و اکسندۀ (پس از اعمال زیروندها)، آن‌ها را ساده می‌کنیم. مثلاً اگر این اعداد ۲ و ۴ بودند، به جای آن‌ها از اعداد ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم.

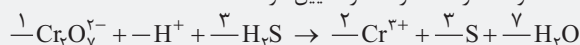
مثال: موازنه واکنش اکسایش - کاهش زیر را ببینید:



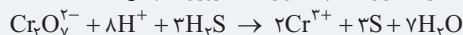
حالا تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده (H_2S) را ضریب گونه اکسندۀ ($\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$) و تغییر عدد اکسایش گونه اکسندۀ را ضریب گونه کاهنده قرار می‌دهیم. چون ۲ و ۴ ساده می‌شوند، به جای این اعداد از ۱ و ۳ استفاده می‌کنیم:



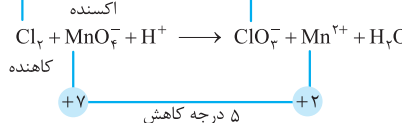
حالا خیلی راحت، با توجه به معلوم‌شدن تعداد اتم‌های Cr، O و S در سمت چپ معادله، می‌توان ضرایب همه گونه‌ها در سمت راست را تعیین کرد:



ضریب H^+ در سمت چپ معادله را ۸ قرار دهیم تا موازنه هیدروژن هم کلی شود!



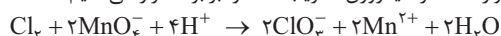
برای موازنه واکنش، ابتدا مقدار تغییرات عدد اکسایش گونه‌های کاهنده و اکسندۀ را تعیین می‌کنیم:



حالا تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده (Cl_2) را ضریب گونه اکسندۀ (MnO_4^-) و تغییر عدد اکسایش گونه اکسندۀ را ضریب گونه کاهنده قرار می‌دهیم. چون ۵ و ۲ ساده می‌شوند، به جای این اعداد از ۲ و ۵ استفاده می‌کنیم:



با توجه به موازنه عنصرهای کلر و منگنز، ضرایب ClO_2^- و Mn^{2+} در سمت راست، هر دو باید برابر ۲ باشند. به این ترتیب، به منظور موازنه عنصر اکسیژن، ضریب H_2O باید برابر ۲ باشد. در آخر، به منظور موازنه عنصر هیدروژن، ضریب H^+ را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

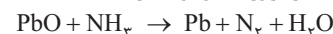


مجموع ضرایب استوکیومتری $1 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 = 13$

گونه اکسندۀ در واکنش، MnO_4^- است که طبق ضرایب استوکیومتری، به ازای مصرف ۲ مول از آن، $2 \times 5 = 10$ مول الکترون مبادله می‌شود، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{2 \text{ mole}^-}{2 \text{ mol MnO}_4^-} \times \frac{10 \text{ mole}^-}{4 \text{ mol MnO}_4^-} = 2 \text{ mole}^-$$

۳ در حد کتاب درسی، اگر یک گونه فلزی (مانند Mg)، جزء واکنش‌دهنده‌ها باشد، فلز قطعاً الکترون از دست می‌دهد و به کاتیون خود تبدیل می‌شود؛ از این‌رو حتماً یک یون فلزی در فراورده‌ها وجود خواهد داشت مانند واکنش: $2\text{Mg} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{MgO}$! اما در این‌جا هم می‌توان گفت که فلز ممکن است به یک ترکیب مولکولی تبدیل شود و در فراورده‌ها، یون نداشته باشیم! هم‌چنین منظور طراح به طور واضح از این‌که می‌گه «در واکنش شرکت می‌کند»، مشخص نیست. هم واکنش‌دهنده‌ها و هم فراورده‌ها جزء مواد شرکت‌کننده در واکنش محسوب می‌شوند. اگر در این‌جا، گونه فلزی را در سمت فراورده‌ها قرار دهیم، مثال‌های نقضی وجود خواهند داشت که یون فلزی در فراورده‌ها وجود ندارد مانند:



۴ برای رد این گزینه می‌توان به واکنش یک اتم فلزی و یک یون فلزی که منجر به تشکیل یک نوع فراورده می‌شود اشاره کرد مانند واکنش: $\text{Fe(s)} + 2\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) \rightarrow 3\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$ که در این واکنش، واکنش‌دهنده‌های جامد و محلول به فراورده محلول تبدیل شده‌اند یا می‌توان به واکنش $\text{Zn(s)} + \text{V}^{5+}(\text{aq}) \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + \text{V}^{4+}(\text{aq})$ اشاره کرد که واکنش‌دهنده‌های جامد و محلول به فراورده‌های محلول تبدیل شده‌اند.

۹۹- گزینه ۴

درسنامه در سلول‌های گالوانی به موارد زیر توجه کنید:

- ۱ آند: قطب منفی و کاتد قطب مثبت است.
- ۲ الکترون از آند به کاتد و آنیون‌ها از دیواره متخلخل به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند.
- ۳ $\text{emf} = E_{\text{کاتد}}^\circ - E_{\text{آند}}^\circ$
- ۴ گونه با قدرت کاهندگی بیشتر در آند اکسایش و گونه با قدرت اکسندگی بیشتر در کاتد کاهش می‌یابد.
- ۵ اگر تیغه‌های آندی و کاتدی در واکنش شرکت کنند، جرم تیغه آندی کاهش و جرم تیغه کاتدی افزایش می‌یابد.

با توجه به سلول‌های گالوانی (۱) و (۲) می‌توان به $E_{\text{X,Y}}^\circ$ پی برد:

در سلول (۱) جهت حرکت الکترون‌ها از X به Cu است؛ بنابراین:

$$\text{emf}_{(1)} = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ - E_{\text{X}^{n+}/\text{X}}^\circ = 0.34 - x = 1.08 \Rightarrow x = -0.74 \text{ V}$$

در سلول (۲) جهت حرکت الکترون از Cu به Y است؛ بنابراین:

$$\text{emf}_{(2)} = E_{\text{Y}^{n+}/\text{Y}}^\circ - E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ = y - 0.34 = 0.46 \Rightarrow y = +0.8$$

★ نکته در جدول پتانسیل کاهش از بالا به پایین با کاهش E° ، قدرت کاهندگی افزایش و قدرت اکسندگی کاهش می‌یابد.

بررسی گزینه‌ها: ۱ با توجه به E° هر نیم‌سلول، مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون آن‌ها به صورت $\text{X}^{n+} < \text{Sn}^{2+} < \text{Cu}^{2+} < \text{Y}^{n+}$ است.

۲ با توجه به این‌که $E_{\text{X}}^\circ < E_{\text{Y}}^\circ$ است، در سلول $\text{X} - \text{Y}$ ، کاتد X و آند است؛ بنابراین داریم:

$$\text{emf}_{(\text{X-Y})} = E_{\text{Y}}^\circ - E_{\text{X}}^\circ = 0.8 - (-0.74) = 1.54 \text{ V}$$

۳ با قرارگیری قلع به جای X در سلول (۱)، با توجه به بیش‌تر بودن قدرت کاهندگی قلع از مس همانند X، جهت جریان تغییری نمی‌کند. ولی در سلول (۲)، با توجه به بیش‌تر بودن قدرت کاهندگی قلع از مس برخلاف Y، با قرارگیری قلع به جای Y در سلول، Y آند و Cu کاتد شده و جهت جریان در مدار عوض می‌شود.

۴ در هر دو سلول با Cu و Cu^{2+} سروکار داریم؛ یعنی به ازای تولید یا مصرف هر مول Cu، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود، پس به ازای تغییر جرم یکسانی از مس در دو سلول، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو سلول، برابر خواهد بود.

تیزبازی اگر خیلی سریع گزینه‌ها رو به برانداز می‌گردین، تو سه‌سوت و بدون هیچ حساب کتابی، می‌تونستید بفهمید، جواب سؤال، ۴ است، زیرا طبق نیم‌واکنش‌های $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^-$ و $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}$ که به ترتیب در سلول‌های (۱) و (۲) انجام می‌شوند، شمار الکترون‌های مبادله‌شده به مول و در نتیجه جرم بستگی دارد که در این‌جا برای هر دو سلول برابر است.

مشاوره پیشنهاد می‌کنیم در سر جلسه کنکور، برای سؤالات غیرشمارشی مانند این سؤال، ابتدا خیلی سریع گزینه‌ها رو به نگاه بندازین. ممکنه در بین گزینه‌ها، یک گزینه خیلی ساده و تابلو وجود داشته باشه که به شما کمک کنه که وقتتون هدر نره و خیلی سریع‌تر از تست عبور کنید. مطمئن باشید طراحان برای سنجش تیزبینی و هوش شما، از چنین سؤالاتی استفاده خواهند کرد.



گام ۴ حالا با استفاده از درصد جرمی رطوبت در نمونه جدید و به دست آوردن x ، درصد جرمی سیلیس را در نمونه جدید محاسبه می‌کنیم.

$$100 \times \frac{\text{جرم رطوبت در نمونه جدید}}{\text{جرم کل نمونه جدید}} = \text{درصد جرمی رطوبت در نمونه جدید}$$

$$= \frac{10+x}{100+x} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 12/5$$

$$100 \times \frac{\text{جرم سیلیس در نمونه جدید}}{\text{جرم کل نمونه جدید}} = \text{درصد جرمی سیلیس در نمونه جدید}$$

$$= \frac{36}{100+12/5} \times 100 = 32\%$$



نکته اگر در یک مخلوط، جرم ماده‌ای تغییر کند، درصد جرمی بقیه مواد در مخلوط خودشان (بدون آن ماده)، تغییری نخواهد کرد.

ثابت = درصد جرمی B و C در مخلوط B و C $\rightarrow$ جرم A تغییر کند. مخلوط A، B و C

$$\Rightarrow \frac{\text{جرم یا درصد جرمی B در مخلوط اولیه}}{\text{مجموع جرم یا درصد جرمی B و C در مخلوط اولیه}} = \frac{\text{جرم یا درصد جرمی B در مخلوط نهایی}}{\text{مجموع جرم یا درصد جرمی B و C در مخلوط نهایی}}$$

درصد جرمی سیلیس در نمونه اولیه، ۳۶٪ و مجموع درصد جرمی همه مواد به جز آب برابر ۹۰ = ۱۰۰ - ۱۰ درصد است. در نمونه نهایی، مجموع درصد جرمی همه مواد به جز آب، برابر ۸۰ = ۱۰۰ - ۲۰ درصد است. با توجه به این که درصد جرمی سیلیس در مخلوط همه مواد به جز آب، ثابت است، خواهیم داشت:

$$\frac{36}{90} = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 32\%$$

نمونه نهایی نمونه اولیه

۱۰۳ - گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها: ۱) خارج کردن مقداری SO_4Cl_2 ، واکنش را در جهت تولید آن و به سمت برگشت پیش می‌برد که موجب کاهش غلظت مولی گازهای فراورده می‌گردد. تزریق مقداری Cl_2 نیز واکنش را در جهت برگشت پیش برده و در نهایت موجب کاهش غلظت مولی فراورده گازی SO_2 ولی افزایش غلظت مولی فراورده Cl_2 می‌شود. (دقت کنید که تعادل در جهت تعدیل اثر اعمال شده جابه‌جا می‌شود و اثر اعمال شده را نمی‌تواند کاملاً برطرف کند). ۲) خارج کردن مقداری Cl_2 ، واکنش را در جهت رفت جابه‌جا کرده و در نهایت موجب افزایش غلظت SO_2 ولی کاهش غلظت Cl_2 می‌شود. تزریق مقداری SO_2 هم موجب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت و کاهش غلظت مولی Cl_2 ولی افزایش غلظت مولی SO_2 می‌گردد.

۳)

نکته برای راحتی بررسی اثر تغییر دما، مقدار آنتالپی واکنش یا Q را مانند یکی از مواد شرکت‌کننده در تعادل در نظر می‌گیریم؛ بنابراین با افزایش دما، تعادل برای جبران، در جهت مصرف Q و با کاهش دما، تعادل در جهت تولید Q جابه‌جا می‌شود. مثلاً با افزایش دما، تعادل $2\text{SO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{SO}_3(\text{g}) + Q$ ، در جهت مصرف Q یعنی در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود تا با مصرف گرما تغییر تحمیل شده و افزایش دما را تا حد امکان جبران کند.

تعادل داده‌شده، گرماگیر ($\Delta H > 0$) است؛ بنابراین با کاهش دما در جهت برگشت جابه‌جا شده که سبب کاهش غلظت فراورده‌ها خواهد شد. با کاهش حجم (افزایش فشار)، غلظت مولی همه گازها افزایش می‌یابد.

۴) با کاهش حجم ظرف (افزایش فشار)، غلظت مولی همه گازها افزایش می‌یابد. از طرفی، تعادل گرماگیر بوده و با افزایش دما در جهت رفت جابه‌جا شده که سبب افزایش غلظت مولی فراورده‌ها خواهد شد.

تله با کاهش حجم (افزایش فشار)، تعادل به سمت تعداد مول‌های گازی کمتر جابه‌جا می‌شود. در این جا یعنی در جهت برگشت، با جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت، تعداد مول‌های فراورده‌ها کاهش می‌یابد، اما نکته این‌جاست که این کاهش تعداد مول، به دلیل کاهش حجم صورت گرفته و در نهایت، تعداد مول معادل غلظت است، به دلیل اثر بیشتر حجم.

کاهش حجم، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، پس از کاهش حجم (افزایش فشار)، تعادل برای جبران در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود، اما نمی‌تواند اثر تغییر را به طور کامل از بین ببرد و در نهایت، غلظت همه مواد موجود در تعادل افزایش می‌یابد.

نکته برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک واکنش اکسایش - کاهش می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \text{تغییر عدد اکسایش} \times \text{ضریب اکسند} &= \text{شمار اتم‌های} = \text{شمار e های مبادله‌شده} \\ \text{اتم در اکسند} & \\ \text{تغییر عدد اکسایش} \times \text{ضریب کاهند} &= \text{شمار اتم‌های} = \text{شمار e های مبادله‌شده} \\ \text{اتم در کاهند} & \end{aligned}$$

۱۰۱ - گزینه ۱

درس‌نامه تکنیک مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی می‌توانید با استفاده از روش زیر، ΔH فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی را با هم مقایسه کنید: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و یک کاتیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

گام ۱ اگر مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و بار یک کاتیون برای دو ترکیب یونی، برابر باشد، شعاع یون‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی بزرگ‌تر است.

مثال: برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه بلور MgO و CaCl_2 می‌توان نوشت:

$$\text{MgO: مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و یک کاتیون} = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Mg}^{2+} \quad \text{O}^{2-}$$

$$\text{CaCl}_2: \text{مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و یک کاتیون} = 2 + 1 = 3$$

$$\text{Ca}^{2+} \quad \text{Cl}^{-}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}} \text{MgO} > \text{CaCl}_2$$

مثال: برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه بلور Na_2O و MgF_2 اول می‌ریم سراغ مقایسه بار یون‌ها:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Na}_2\text{O: } 2 + 2 = 4 \\ \text{Na}^+ \quad \text{O}^{2-} \\ \text{MgF}_2: 2 + 1 = 3 \\ \text{Mg}^{2+} \quad \text{F}^{-} \end{array} \right.$$

حالا که مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون برای هر دو ترکیب یکسان شد، می‌ریم دست به دامن شعاع یون‌ها می‌شیم!

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{O}^{2-} > \text{F}^{-} \\ \text{Na}^+ > \text{Mg}^{2+} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}} \text{Na}_2\text{O} < \text{MgF}_2$$

در ۱) ترکیب اول آنتالپی فروپاشی بزرگ‌تری نسبت به ترکیب دوم دارد، به همین دلیل نسبت آنتالپی فروپاشی ترکیب اول به دوم در ۱) بزرگ‌تر از ۱ است، اما در ۲) تا ۴)، قضیه برعکس! یعنی ترکیب دوم، آنتالپی فروپاشی بزرگ‌تری داشته و نسبت آنتالپی فروپاشی ترکیب اول به دوم در آن‌ها، کوچک‌تر از ۱ است.

$$\frac{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{LiF})}{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{KBr})} > 1$$

به دلیل کوچک‌تر بودن شعاع یون‌ها

$$\frac{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{MgO})}{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{AlF}_3)} < 1$$

به دلیل بزرگ‌تر بودن شعاع یون‌ها

$$\frac{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{KBr})}{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{NaCl})} < 1$$

به دلیل بزرگ‌تر بودن شعاع یون‌ها

$$\frac{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{CaO})}{\Delta H_{\text{فروپاشی}}(\text{Al}_2\text{O}_3)} < 1$$

به دلیل کم‌تر بودن مجموع بار یک کاتیون و یک آنیون

۱۰۲ - گزینه ۲

روش گام ۱ برای سادگی، جرم نمونه خاک رس را ۱۰۰ گرم و جرم رطوبت اضافه‌شده به آن را x گرم فرض می‌کنیم.

$$\text{جرم رطوبت در نمونه جدید: } (10+x) \text{ g} \Rightarrow \text{جرم رطوبت اولیه: } 10 \text{ g}$$

$$\text{جرم نمونه جدید: } (100+x) \text{ g} \Rightarrow \text{جرم نمونه اولیه: } 100 \text{ g}$$

$$\text{جرم سیلیس در نمونه جدید: } 36 \text{ g} \Rightarrow \text{جرم سیلیس اولیه: } 36 \text{ g}$$

و یا واکنش‌هایی که در آن‌ها مواد واکنش‌دهنده به نسبت ضریب استوکیومتری وارد واکنش شده‌اند، درصد پیشرفت را می‌توان بر مبنای واکنش‌دهنده‌ها هم حساب کرد:

$$\frac{\text{مقدار مصرف‌شده واکنش‌دهنده}}{\text{مقدار آغازی واکنش‌دهنده}} = \frac{\text{درصد پیشرفت (بازده درصدی) بر مبنای واکنش‌دهنده}}{100}$$

گام ۳ محاسبه بازده درصدی در دمای $a^\circ\text{C}$:

	H_2	+	I_2	$\rightleftharpoons$	2HI
مول اولیه	۱		۱		۰
تغییر مول	$-x$		$-x$		$+2x$
مول تعادلی	$1-x$		$1-x$		$2x$

$$K = \frac{[\text{HI}]^2}{[\text{H}_2][\text{I}_2]} \Rightarrow 0.01 = \frac{\left(\frac{2x}{2}\right)^2}{\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)} \Rightarrow 0.01 = \frac{4x^2}{(1-x)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}} 0.1 = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow 1-x = 20x \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$a \text{ دمای بازده درصدی در دمای } a = \frac{\text{مقدار مصرف‌شده } \text{H}_2}{\text{مقدار اولیه } \text{H}_2} \times 100 = \frac{21}{1} \times 100 = \frac{100}{21}$$

گام ۴ محاسبه بازده درصدی واکنش در دمای $b^\circ\text{C}$:

$$K = 4 \Rightarrow \frac{4x^2}{(1-x)^2} = 4 \xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}} \frac{2x}{1-x} = 2 \Rightarrow 2x = 2 - 2x \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = 0.5$$

$$b \text{ دمای بازده درصدی در دمای } b = \frac{\text{مقدار مصرف‌شده } \text{H}_2}{\text{مقدار اولیه } \text{H}_2} \times 100 = \frac{0.5}{1} \times 100 = \frac{100}{2}$$

گام ۵ محاسبه نسبت بازده درصدی در دمای b به دمای a :

$$\frac{\text{بازده درصدی در دمای } b}{\text{بازده درصدی در دمای } a} = \frac{\frac{100}{2}}{\frac{100}{21}} = \frac{21}{2} = 10.5$$

بدون توجه به جهت

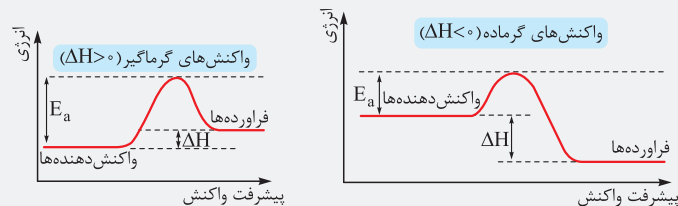
افزایش فشار (کاهش حجم) $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل $\leftarrow$ افزایش غلظت همه گازها

بدون توجه به جهت

کاهش فشار (افزایش حجم) $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل $\leftarrow$ کاهش غلظت همه گازها

۱۰۴ - گزینه ۳

نکته نمودار انرژی - پیشرفت واکنش‌های گرماگیر و گرماده به صورت زیر است:



در هر دو نوع واکنش، فاصله قله تا سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها، نشان‌دهنده انرژی فعال‌سازی (E_a) و تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، نشان‌دهنده مقدار آنتالپی واکنش (ΔH) است.

فاصله قله تا سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها، نشان‌دهنده انرژی فعال‌سازی واکنش است که هر چه بیشتر باشد، انرژی فعال‌سازی نیز بیشتر خواهد بود.

دربارۀ سایر گزینه‌ها، دقت کنید که موارد آورده‌شده در قسمت دوم، نشان‌دهنده آنتالپی واکنش است که تنها با دانستن فاصله قله تا سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا فراورده‌ها، نمی‌توان آن را تعیین کرد.

۱۰۵ - گزینه ۲

نکته محاسبه درصد پیشرفت یا بازده درصدی واکنش‌های تعادلی

درس‌نامه (محاسبه درصد پیشرفت یا بازده درصدی واکنش‌های تعادلی)

در واکنش‌های تعادلی که شامل یک نوع واکنش‌دهنده هستند (مانند واکنش $A \rightleftharpoons B$)

